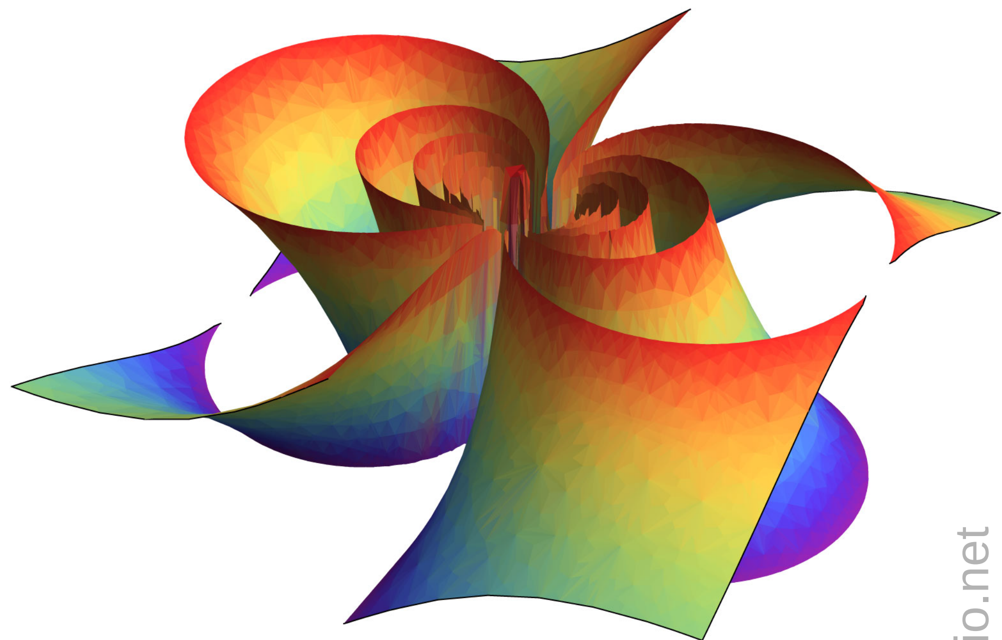
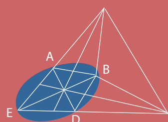


Cálculo Superior

Teoría y Ejemplos

Walter Mora f., Geovanny Figueroa M.



Textos Universitarios

Revista Digital Matemática Educación e Internet (www.cisde.itcr.ac.cr)

Find your solutions manual here!

CÁLCULO SUPERIOR

Curso del Instituto Tecnológico de Costa Rica

Walter Mora F.,
Geovanni Figueroa M.
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica.
www.cidse.itcr.ac.cr

Contenido

1 Cónicas **1**

1.1 Introducción. 1
1.2 Preliminares 2
1.3 Lugares geométricos 3
1.4 Parábola 7
1.5 Elipse 16
1.6 Hipérbola 27
1.7 (*) Ecuación de segundo grado 35

2 Derivadas parciales **39**

2.1 Derivada Parcial. 39
2.2 Interpretación geométrica de la derivada parcial 44
2.3 Derivadas Parciales de Orden Superior 47
2.4 Incrementos y Diferenciales. Diferencial Total. 56
2.4.1 Introducción. 56
2.4.2 Incrementos y Diferenciales. 57
2.4.3 Funciones Diferenciables. 59
2.5 Regla de la Cadena. Derivación Implícita. 62
2.5.1 Regla de la Cadena 62
2.5.2 Derivación Implícita. 66

2.6 Ejercicios Resueltos (Adicionales) 73

3 Gradiente, derivadas direccionales y plano tangente 77

3.1 Vector Gradiente. 77
3.2 Derivada direccional 78
3.2.1 (*) Vector Unitario Tangente. 86
3.3 Plano Tangente. 92
3.3.1 Gradiente y Curvas y Superficies de Nivel. 92
3.3.2 Plano Tangente. 93

4 Funciones de varias variables, superficies y sólidos. 101

4.1 Coordenadas tridimensionales 101
4.2 Funciones de Dos Variables 103
4.3 Gráfica de una función de dos variables. 106
4.4 Planos y Rectas en el Espacio 107
4.5 Superficies Cilíndricas 112
4.6 Curvas sobre un Plano 116
4.7 Curvas de Nivel y Trazas 118
4.8 Superficies Cuadráticas 122
4.8.1 Elipsoide 123
4.8.2 Paraboloide elíptico. 123
4.8.3 Paraboloide hiperbólico 124
4.8.4 Cono elíptico 124
4.8.5 Hiperboloide de una hoja 125
4.8.6 Hiperboloide de dos hojas 125
4.9 Parametrización de una Curva en el Espacio. 127
4.10 Intersección de Superfices. 128

5 Sólidos 131

6 Máximos y mínimos locales. Multiplicadores de lagrange. 147

6.1 Máximos y mínimos 147
6.2 Extremos con restricciones: Multiplicadores de Lagrange 162

7 Integral doble e integral triple. Cambio de variable. 167

7.1 Proyecciones Sobre los Planos Coordenados. 167
7.2 Integral Doble. 171
7.3 Área y Volumen 176
7.4 Cambio de Variable en una Integral Doble. 184
7.4.1 Caso de Coordenadas Polares. 184

7.5 Integral Triple. 192
7.6 Cambio de Variables. Coordenadas Cilíndricas y Esféricas. 194
7.6.1 Coordenadas Cilíndricas. 195
7.6.2 (∗) Coordenadas Esféricas. 204
7.6.3 (∗) Describiendo Superficies en Coordenadas Esféricas. 204
7.6.4 (∗) Intercambiar Ejes. 207
7.6.5 (∗) Cambio de Variable con Coordenadas Esféricas. 207
7.7 Singularidades. 215

8 Integral de línea. Integral de superficie. 217

8.1 Curvas y Parametrizaciones. 217
8.2 Campos Escalares y Campos Vectoriales. 220
8.3 Longitud de una Curva. 222
8.4 Integral de Línea para Campos Escalares. 224
8.5 (∗)Longitud de Arco en Coordenadas Polares. 225
8.6 Integral de Línea para Campos Vectoriales. 227
8.7 Independencia de la Trayectoria. 233
8.8 Teorema de Green (en el plano). 238
8.9 Integral de Línea para el Área. 241
8.10 Parametrización de una Superficie. 241
8.10.1 Superficies Regulares (suaves). 243
8.11 Área de una Superficie. 243
8.12 Integral de un Campo Vectorial sobre una Superficie. 248
8.12.1 Superficies Orientables. 256
8.13 Teorema de la Divergencia. 258
8.14 Teorema de Stokes (Teorema de Green en el espacio). 262
8.15 Ejemplos adicionales. 268

Bibliografía 277

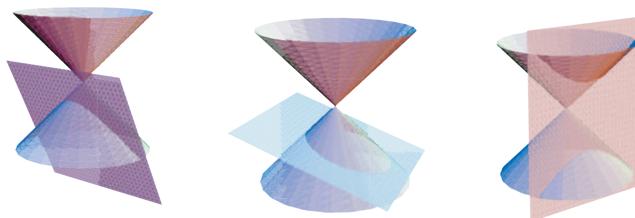
Capítulo 1

CÓNICAS

1.1 INTRODUCCIÓN.

Para los antiguos geómetras griegos como Euclides (300 A.C.) y Arquímides (287-212 A.C.), una sección cónica (parábola, elipse e hipérbola) era una curva en el espacio, la cual resultaba de la intersección de un plano con un cono de dos mantos o ramas, siempre y cuando el plano no pasara por el vértice del con. En caso de que lo hiciera daba lugar a las llamadas cónicas degeneradas (un punto (el vértice del cono), una recta (un generatriz del cono) o un par de rectas que se intersecan (un par de generatrices)).

En la figura 1 se muestran las secciones cónicas: parábola, elipse e hipérbola tal y como fueron definidas por los antiguos geómetras griegos.



Los griegos en su tiempo se dedicarón con perseverancia al estudio de sus propiedades geométricas.Sin embargo, es hasta inicios del siglo XVII (1637), con el descubrimiento casi de manera independiente de la geometría analítica, por parte de Descartes y Fermat, que se toma conciencia de su utilidad y pasan a ocupar un lugar de privilegio, maxime cuando Kepler descubrió (y Newton explicó) que las órbitas de los planetas y otros cuerpos en el sistema solar son secciones cónicas.

La geometría analítica plana usa el álgebra y el cálculo para estudiar las propiedades de las curvas en el plano xy. Su idea fundamental es establecer una correspondencia entre una ecuación $F(x,y)=0$ y su lugar geométrico. Una de la ideas centrales de la geometría analítica es que dado un lugar geométrico o una curva, sus propiedades pueden deducirse en forma algebraica o analítica a partir de su ecuación $F(x,y)=0$.

1.2 PRELIMINARES

Distancia entre dos puntos

Recordemos que la distancia euclidiana de un punto $A=(a,b)$ a otro punto $B=(p,q)$ es

$$|AB| = d(A,B) = \sqrt{(a-p)^2+(b-q)^2}$$

■ **EJEMPLO 1.1**

Sean $A=(1,1)$ y $B=(5,3)$. Entonces

$$|AB| = d(A,B) = \sqrt{(1-5)^2+(1-3)^2} = \sqrt{20}$$

Completar cuadrados.

En el tema de cónicas es muy útil la “completación de cuadrados” pues nos permite obtener la ecuación de una cónica dada, en una forma más adecuada para algunos cálculos.

Una manera de completar cuadrados es

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}+c$$

en particular

$$ax^2+bx=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$$

■ **EJEMPLO 1.2**

En cada caso, completar cuadrados

a.) $4x^2-8x$

Solución

$$\begin{aligned}4x^2-8x &= 4\left(x+\frac{-8}{8}\right)^2-\frac{(-8)^2}{4\cdot 4}\\ &= 4(x-1)^2-4\end{aligned}$$

b.) y^2+4y-8

Solución

$$\begin{aligned}y^2+4y-8 &= \left(y+\frac{4}{2}\right)^2-\frac{(4)^2}{4\cdot 1}-8\\ &= (y+2)^2-12\end{aligned}$$

1.3 LUGARES GEOMÉTRICOS

El conjunto de todos los puntos (x,y) en el plano cuyas coordenadas satisfacen una propiedad, que puede estar dada por una ecuación $F(x,y)=0$, se conoce como *lugar geométrico.*

■ **EJEMPLO 1.3**

Compruebe que el conjunto de todos los puntos $P=(x,y)$ que equidistan de los puntos $A=(1,1)$ y $B=(5,3)$ es la mediatriz del segmento de recta que une a estos dos puntos.

Solución

El punto $P=(x,y)$ equidista de $A=(1,1)$ y $B=(5,3)$ si y sólo si

$$\begin{aligned}
d(P,A) &= d(P,B) \\
\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} &= \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \\
(x-1)^2+(y-1)^2 &= (x-5)^2+(y-3)^2 \\
x^2-2x+1+y^2-2y+1 &= x^2-10x+25+y^2-6y+9 \\
2x+y &= 8 \\
y &= -2x+8 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el lugar geométrico es la recta $y=-2x+8$ cuya pendiente es -2. La recta que pasa por lo puntos $A=(1,1)$ y $B=(5,3)$ tiene ecuación

$$y=\frac{1}{2}+\frac{x}{2} \qquad (2)$$

por lo que su pendiente es $\frac{1}{2}$; con lo cual las dos rectas (1) y (2) son perpendiculares. Si resolvemos las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente, determinamos que la intersección de estas rectas es, de hecho, el punto medio $M=(3,2)$ del segmento que une los puntos A y B. Esto se ilustra en la figura que sigue.

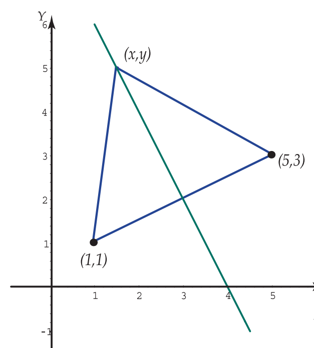


Figura 1.1

■ **EJEMPLO 1.4**

Determine el lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$ cuya distancia al punto $A=(7,1)$ es dos veces su distancia al punto $B=(1,4)$.

Solución

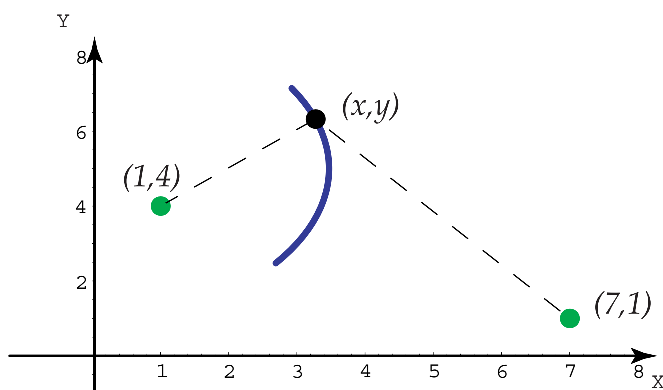
Los puntos A, B y P aparecen en la figura 2, junto con una curva que pasa por P y que representa el lugar geométrico buscado. Como

$$|AP| = 2|BP| \implies |AP|^2 = 4|BP|^2$$

obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}(x-7)^2+(y-1)^2 &= 4\,(x-1)^2+(y-4)^2 \\ x^2+y^2+2x-10y+6 &= 0 \\ (x+1)^2+(y-5)^2 &= 20\end{aligned}$$

Esta última ecuación nos dice el lugar geométrico corresponde a todos los puntos (x,y) cuya distancia al punto $C=(-1,5)$ es $\sqrt{20}$. Coo todos los puntos equidistan de C entonces lo que tenemos es un círculo con centro $(-1,5)$ y radio $r=2\sqrt{5}$.



■ **EJEMPLO 1.5**

Hallar el lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$ cuya distancia a la recta (vertical) $x=-3$ es igual a su distancia al punto $A=(3,0)$.

Solución

Los puntos A, P y la recta se muestran en la figura (1.2).

La distancia de un punto a una recta es la longitud del único segmento perpendicular del punto a la recta. La distancia del punto $P = (x, y)$ a la recta $x = -3$ es la misma que la distancia entre los puntos $(x, 0)$ y $(-3, 0)$. Esta distancia es

$$\sqrt{(x+3)^2 + 0} = |x+3|$$

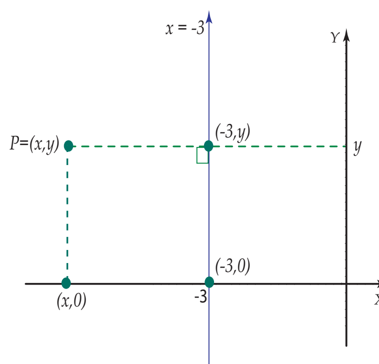


Figura 1.2

Entonces

$$|PR| = |x+3|$$

y la distancia de P al punto A es

$$|AP| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= (x-3)^2 + y^2 \\ (x+3)^2 - (x-3)^2 &= y^2 \\ 12x &= y^2 \end{aligned}$$

El lugar geométrico es la parábola de ecuación $x = \dfrac{y^2}{12}$ y se muestra en la figura 4.

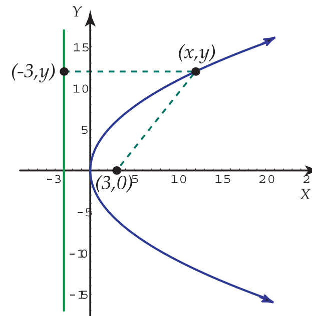


Figura 1.3

EJERCICIOS

1.1 Determine el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ que equidistan de los puntos $A = (-1, 2)$ y $B = (-2, 1)$. Respuesta: $y = -x$

1.2 Determine el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ cuya distancia a la recta $y = 1$ es igual a la distancia al punto $A = (3, 3)$. Respuesta: $(x-3)^2 = 4\,(y-2)$

1.3 Determine el lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$ tales que su distancia al punto $A=(1,1)$ es dos veces su distancia al punto $B=(1,4)$.
Respuesta: $(x-1)^2+(y-5)^2=4$

1.4 Determine el lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$ cuya suma de distancias a los puntos $A=(-3,0)$ y $B=(3,0)$ es 10.

Respuesta: $(x-1)^2+(y-5)^2=4$

1.5 Determine el lugar geométrico de los puntos P tales que el producto de sus distancias a dos puntos fijos $A=(-a,0)$ y $B=(a,0)$ es a^2

1.6 Determine el lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$ tales que su distancia al punto $A=(7,1)$ es k veces su distancia al punto $B=(1,4)$. ¿Qué sucede para valores de k muy pequeños?. ¿ Qué sucede para $k=1$? y qué sucede para valores de k muy grandes?

1.7 Considere los puntos $A=(2,0)$, $B=(0,0)$ y $C=(1,3)$, los cuales forman un triángulo equilátero. Determine el lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$ tales que la suma de las distancias $d(P,A)$ y $d(P,B)$ es igual a la distancia $d(P,C)$.

1.4 PARÁBOLA

Ahora, vamos a deducir las ecuaciones de las secciones cónicas a partir de su definición como un lugar geométrico y no como la intersección de un cono con un plano, como se hizo en la antigüedad. Ya conocemos que la gráfica de una función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$, es una parábola. Sin embargo, no toda parábola es la gráfica de una función en x, como podemos concluir de la siguiente definición.

Definición 1.1 *Una parábola es el conjunto de puntos $P(x,y)$ en el plano que equidistan de un punto fijo F (llamado* foco *de la parábola) y de una recta fija L (llamada* directriz *de la parábola) que no contiene a F (figura 1).*

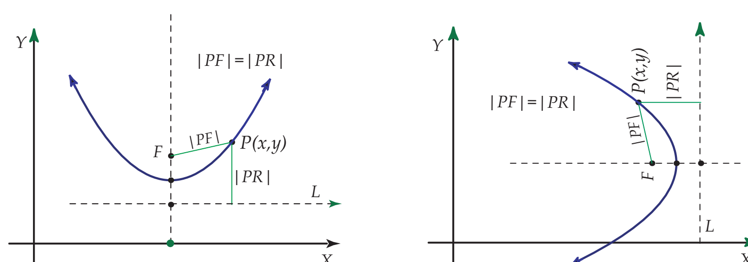


Figura 1.4

La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz, se llama *eje de simetría* de la parábola. Se puede observar en la figura 1 que una parábola es simétrica respecto a su

eje de simetría.

El *punto medio entre el foco y la directriz* se llama *vértice* y corresponde al punto donde el eje de simetría corta a la parábola.

Teorema 1.1 (Ecuación canónica de una parábola)
La forma canónica de la ecuación de una parábola con vértice $v = (h,k)$ *y directriz* $y = k - p$ *es*

$$(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k)$$

El eje de la parábola es vertical y el foco F está a $|p|$ unidades (orientadas) del vértice. Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba (hacia el semieje positivo del eje Y) y el foco está en $(h, k+p)$; si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo y el foco está en $(h, k-p)$.

Si la directriz es $x = h - p$ (eje horizontal), la ecuación es

$$(y-k)^2 = 4\,p\,(x-h)$$

El eje de la parábola es horizontal y el foco F está a $|p|$ unidades (orientadas) del vértice. Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha y el foco está en $(h+p, k)$; si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda y el foco está en $(h-p, k)$.

Ecuación $(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k)$

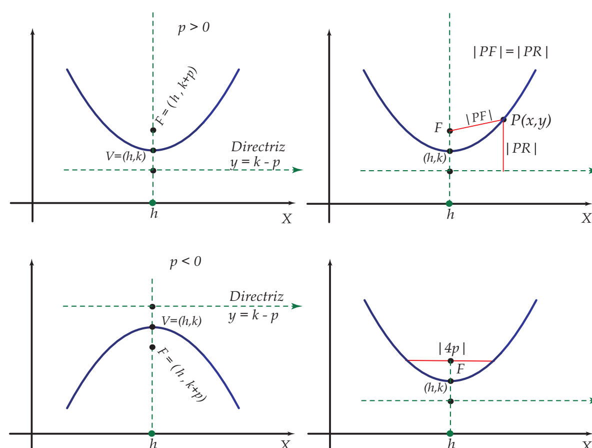


Figura 1.5

Ecuación $(y-k)^2 = 4\,p\,(x-h)$

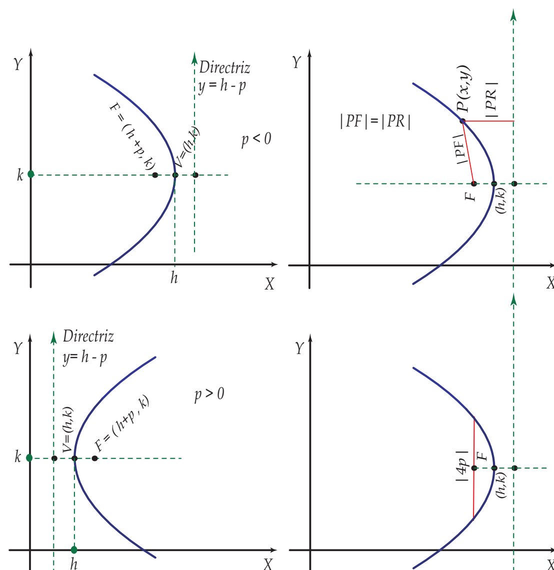


Figura 1.6

La demostración de este teorema no es difícil, basta aplicar la definición y la fórmula de distancia (figura 1). Para el caso en el cual el eje de la parábola es vertical, tenemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-h)^2+((y-k)-p)^2} &= -(k-p)\\ (x-h)^2+((y-k)-p)^2 &= (y-(k-p))^2\\ (x-h)^2 &= 4\,p\,(y-k)\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 1.6**

Hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es

$$y^2-6y-4x+17=0$$

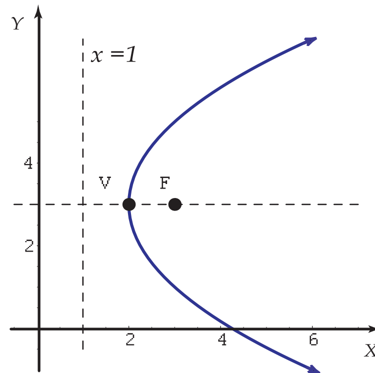
Además trace la gráfica.

Solución

Para hallar la ecuación canónica debemos completar cuadrados. De la ecuación de la parábola tenemos que

$$\begin{aligned} y^2-6y+9-9-4x+17 &= 0 \\ (y-3)^2-4\,(x-2) &= 0 \\ (y-3)^2 &= 4\,(x-2) \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $p=1$ y vértice $V=(2,3)$, por lo tanto, la parábola abre hacia la derecha y tiene el foco en $F=(3,3)$. La recta directriz es $x=1$. La gráfica se muestra en la figura 2.



■ **EJEMPLO 1.7**

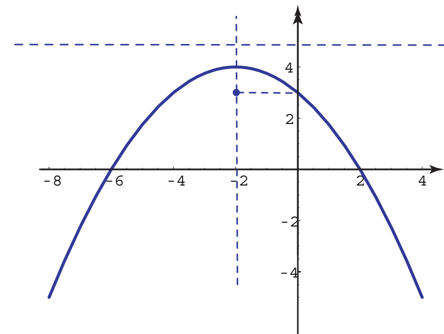
Trazar la gráfica y hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-2,4)$ y foco en $(-2,3)$.

Solución

Dado que el vértice y el foco tienen igual abscisa el eje de la parábola es vertical, además abre hacia abajo y $p=-1$, entonces la ecuación está dada por:

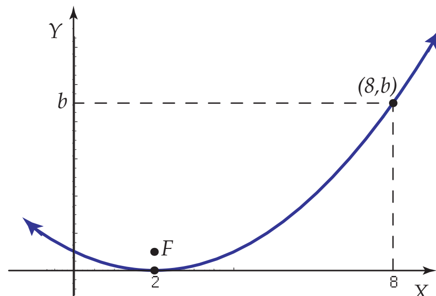
$$(x+2)^2=-4(y-4)$$

La directriz es $y=5$. La gráfica se muestra en la figura 3.



EJEMPLO 1.8

Considere la parábola de la figura que sigue



Determine la ecuación canónica y el foco de las parábolas de este tipo, que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones

1. vértice en $(2,0)$.
2. contiene al punto $P=(8,b)$ con $b>0$.
3. la distancia de P a la directriz es 10.
4. eje de simetría paralelo al eje Y.

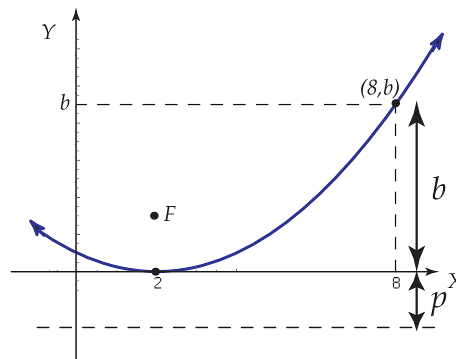
Solución

El vértice es $(h,k)=(2,0)$ por lo que la ecuación de la parábola es

$$(x-2)^2=4p(y-0)$$

Para determinar p tenemos dos datos

- La distancia de $(8,b)$ a la directriz es 10, es decir $b+p=10$
- El punto $(8,b)$ está en la parábola, es decir $(8-2)^2=4p(b)$



Entonces tenemos

$$\begin{aligned} b &= 10-p \\ 36 &= 4pb \implies 36 = 4p(10-p) \implies 36-40p+4p^2 = 0 \end{aligned}$$

Con lo que $p=1$ o $p=9$ y en ambos casos $b>0$. Por lo tanto, las parábolas que cumplen estas condiciones son $(x-2)^2 = 4y$ o $(x-2)^2 = 36y$.

■ EJEMPLO 1.9

Hallar las parábolas que contienen los puntos $(4,4),(4,-4)$ de la circunferencia $(x-6)^2 + y^2 = 20$ y la distancia de su vértice al centro del ésta es 6 unidades.

Solución.

La situación, según los datos, es la que se presenta en la figura de la derecha. La ecuación es, en ambos casos, $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

- La parábola con vértice $(h,k)=(0,0)$. Como $(4,4)$ está en la parábola, entonces

  $$(y-k)^2 = 4p(x-h) \implies 4^2 = 16p \implies p=1$$

  La ecuación de la parábola es $y^2 = 4x$.

- La parábola con vértice $(h,k)=(12,0)$. Como $(4,4)$ está en la parábola, entonces

  $$y^2 = 4p(x-12) \implies 4^2 = 4p(-8) \implies p = -1/2$$

  La ecuación de la parábola es $y^2 = -2(x-12)$

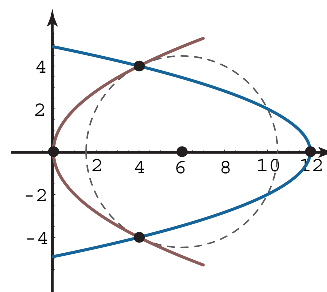


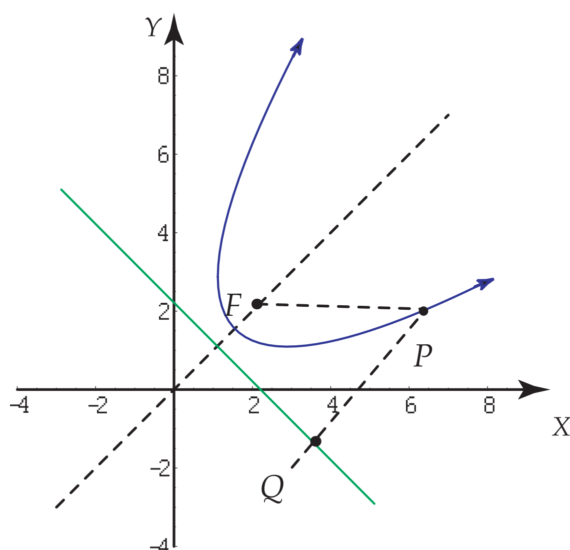
Figura 1.7

■ EJEMPLO 1.10 $(*)$

Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el punto $(1,1)$ y recta directriz $x+y=1$.

Solución

Observe que en este caso la recta directriz no es vertical ni horizontal por lo que, el teorema no nos ayuda en nada y debemos recurrir a la definición misma. Como el eje de la parábola es ortogonal a la directriz y debe pasar por el vértice entonces debe tener ecuación $y=x$.



Para hallar el valor de p debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales y calcular la distancia al vértice.

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ y &= x \end{cases}$$

Puesto que la solución es $(1/2, 1/2)$, entonces $p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y el foco sería $F = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

Para hallar la ecuación de la parábola suponga que el punto $P = (a,b)$ esta sobre ella, entonces para poder calcular la distancia de este punto a la directriz debemos hallar la recta que pasa por este punto y es paralela al eje de la parábola.Dicha recta tienen ecuación

$$y = x + b - a$$

Ahora debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales con la idea de calcular la distancia que buscamos

$$\begin{cases} y &= x+b-a \\ y &= x \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$Q = \left(\frac{1+a-b}{2}, \frac{1-a+b}{2}\right)$$

con lo cual la ecuación de la parábola es

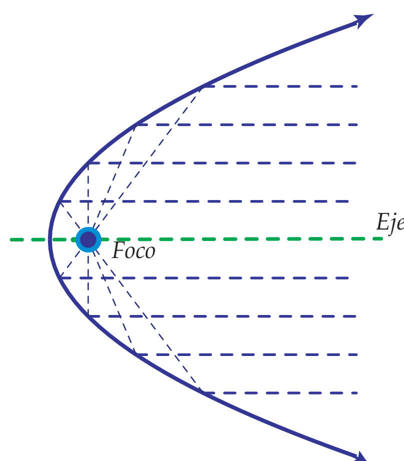
$$\begin{aligned} d(F,P) &= d(P,Q) \\ d(\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right),(x,y)) &= d((x,y),(\left(\frac{1+x-y}{2},\frac{1-x+y}{2}\right) \\ \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{x+y-1}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y-1}{2}\right)^2} \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{x+y-1}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y-1}{2}\right)^2 \\ x^2-2xy+y^2-4 &= 0 \end{aligned}$$

1.4.0.1 Propiedades de la Parábola Una de las propiedades geométricas de la parábola más utilizada fue descubierta por los griegos : un rayo, por ejemplo, de luz, que emane del foco, se refleja en la parábola a lo largo de una trayectoria paralela al eje de la parábola, sin importar cual sea el punto de reflexión.O recíprocamente, un rayo paralelo al eje de la parábola y reflejado en ella pasa por el foco.Este hecho es útil en la construcción de linternas, faros automotrices y faros buscadores, en los cuales el reflector tiene una sección transversal parabólica y la fuente luminosa esta en el foco.Igualmente, en los telescopios y receptores de radar, las señales de una fuente remota entran paralelas al eje y se reflejan pasando por el foco, mediante un reflector parabólico.La potente concentración que produce un reflector parabólico grande, como el de un radiotelescopio, hace posible detectar y analizar señales luminosas muy pequeñas.

Teorema 1.2 (Propiedad de reflexión) *La tangente a una parábola en un punto $P=(x,y)$ forma ángulos iguales con :*

- *La recta que pasa por P y por el foco (ángulo de reflexión).*
- *La recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola (ángulo de incidencia).*

La propiedad de reflexión se muestra en la figura 5.



EJERCICIOS

1.8 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(1,3)$ y foco en $(2,3)$.

1.9 Determine la ecuación canónica de la parábola que abre en la dirección del eje X y pasa por los puntos $(0,0)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$

1.10 Determine la ecuación canónica y el foco de las parábola, que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones

a) vértice en $(2,0)$.
b) contiene al punto $P=(8,b)$ con $b>0$.
c) la distancia de P a la directriz es 10.

Sugerencia: hay dos tipos de parábolas que cumplen estas condiciones.

Respuesta: Las parábolas que cumplen estas condiciones son $y^2=16(x-2)$ o $(x-2)^2=4py$ donde $p=1$ o $p=9$.

1.11 Determine la ecuación canónica de la parábola $-9y^2-8x-3$

1.12 Determine la ecuación canónica de la parábola que abre en la dirección del eje x y pasa por los puntos $(1,3)$, $(3,4)$, $(7,12)$

Respuesta: $(x-1)^2=4\,(y-3)$

1.13 Determine la ecuación canónica de la parábola que tiene eje vertical y pasa por los puntos $(2,3)$, $(4,3)$, $(6,-5)$.

1.14 Determine la ecuación canónica de la parábola que pasa por los puntos $(-2,3)$, $(0,3)$, $(1,9)$.

1.15 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-1,1)$ y directriz $y = x$.

1.5 ELIPSE

Más de mil años después de que los griegos definieran las secciones cónicas, en la época del Renacimiento, el astrónomo polaco Nicholas Copérnicus (1473 - 1543), en su obra "Sobre las Revoluciones de las Esferas Celestes", sostenía que todos los planetas, incluso la Tierra, giraban en órbitas circulares alrededor del Sol. Aunque muchas de las afirmaciones de Cópernico no eran válidas, la controversia provocada por su teoría heliocéntrica empujó a los astrónomos a buscar un modelo matemático que explicará los movimientos de los planetas y el Sol. El primero en hallarlo fue el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571 - 1630).Kepler descubrió que los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol colocado no en el centro sino en uno de los focos.

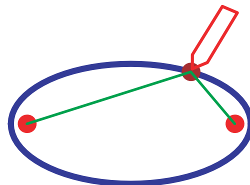
El uso de las elipses para explicar el movimiento de los planetas es tan sólo una de sus diversas aplicaciones. Al igual que lo hicimos para la parábola vamos a definir la elipse como un lugar geométrico. En este caso usando dos puntos focales en vez de uno.

Definición 1.2 (Elipse) *Sean* F_1 *y* F_2 *dos puntos del plano y sea* $a > 0$. *El conjunto de puntos* $P = (x,y)$ *que cumplen*

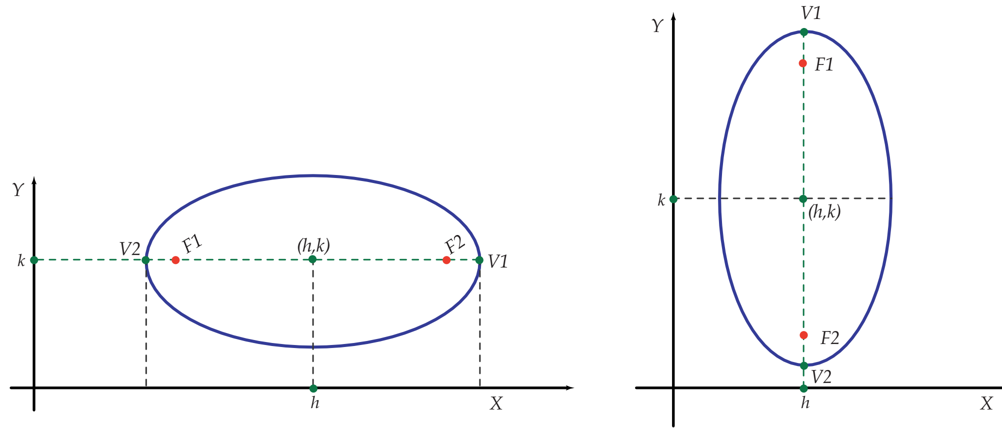
$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

se denomina elipse. *A los puntos* F_1 *y* F_2 *se les llama* focos.

Para visualizar la definición de la elipse, basta imaginar dos chinches clavados en los focos y un trozo de cuerda atada a ellos.Al ir moviendo un lápiz que tensa esa cuerda, su trazo irá dibujando una elipse, como se muestra en la figura 1.



Consideramos una elipse con centrada en el punto (h,k), en un sistema de ejes coordenados. Vamos a considerar solo los dos casos que se ven en la figura



- La recta que pasa por los focos corta a la elipse en dos puntos llamados *vértices*. La cuerda que une los vértices es el *eje mayor* de la elipse y su punto medio el *centro* de la elipse.La cuerda perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro se llama *eje menor* de la elipse.

- La forma canónica de la ecuación de una elipse de centro (h,k) y ejes mayor y menor de longitudes $2a$ y $2b$ respectivamente, con $a > b$, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

El eje mayor es horizontal. Los focos están en el eje mayor, a "c" unidades del centro, con $c^2 = a^2 - b^2$.

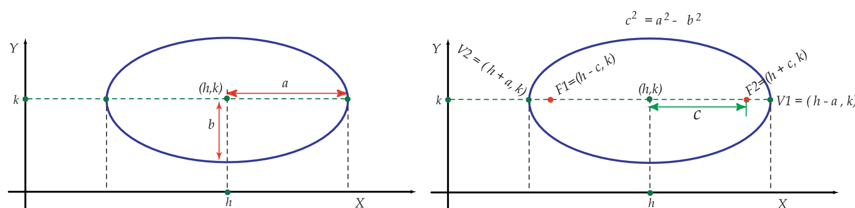


Figura 1.8

- En el caso de que el eje mayor sea vertical, la ecuación toma la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Recuerde que estamos bajo la suposición de que $a > b$.

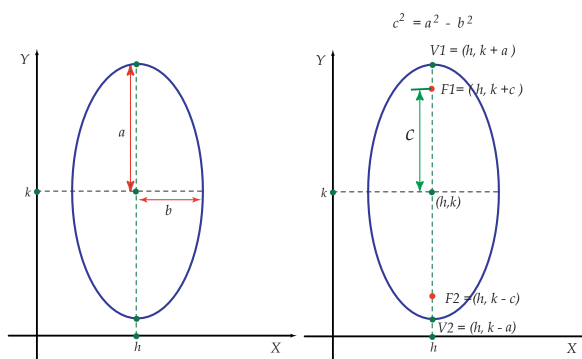


Figura 1.9

"Círculos".

Formalmente, la curva que delimita un círculo se llama *circunferencia.* En un círculo de radio r, la circunferencia es una elipse en la que los focos son iguales y coinciden con el centro. En este caso, $a^2 = b^2 = r^2$. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia de un círculo con centro en (h,k) y radio r, es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Por *abuso del lenguaje* decimos que esta es la ecuación de un *círculo* con centro en (h,k) y radio r.

■ **EJEMPLO 1.11**

En la figura de la derecha aparece un círculo de radio 8, tangente a los ejes coordenados. Determine su ecuación canónica.

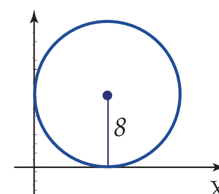


Figura 1.10

Solución.

Como se ve en la figura, el círculo tiene centro $(h,k) = (8,8)$ por lo que su ecuación canónica es

$$(x-8)^2 + (y-8)^2 = 64$$

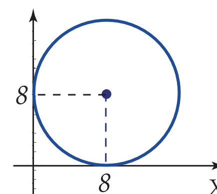


Figura 1.11

■ **EJEMPLO 1.12**

Hallar la ecuación canónica de la elipse

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

Trazar su gráfica identificando los vértices, los focos, el centro y la excentricidad.

Solución

Para hallar la ecuación canónica debemos completar el cuadrado de la expresión en ambas variables x e y.

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 &= 0 \\ 4x^2 - 8x + y^2 + 4y - 8 &= 0 \\ 4(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 16 \\ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

De donde obtenemos que el centro es $(1,-2)$.

Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$ entonces $a = 4$ (a es la longitud mayor, esto nos dice que la elipse es vertical), y $b = 2$ y el valor de c está dado por :

$$c^2 = 16 - 4; \Longrightarrow \ c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Y así, los focos están dados por $(1, -2 \pm 2\sqrt{3})$ y los vértices por $(1,-6), (1,2)$. Por último, la excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Par dibujar la gráfica todavía falta calcular intersecciones con los ejes.

i.) Intersección eje Y.
$y = \dfrac{-4-\sqrt{48}}{2} \approx -5.46$
$y = \dfrac{-4+\sqrt{48}}{2} \approx 1.46$

ii.) Intersección eje X.
$x = \dfrac{8-\sqrt{192}}{8} \approx -0.73$
$x = \dfrac{8+\sqrt{192}}{8} \approx 2.73.$

La gráfica se muestra en la figura

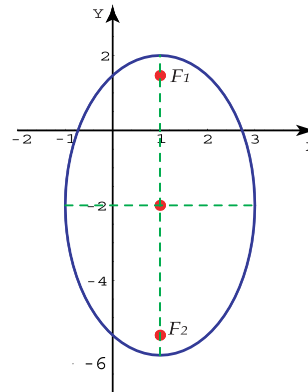


Figura 1.12

■ **EJEMPLO 1.13**

Considere la cónica $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0$. Trazar su gráfica identificando los vértices, los focos, el centro y la intersección con los ejes.

Solución

- Ec. canónica: $\dfrac{(y-3)^2}{4} + \dfrac{(x-2)^2}{1} = 1.$
- Centro: $(h,k) = (2,3)$
- $a^2 = 4,\ b^2 = 1.\ \ c = \sqrt{3}$
- Focos: $(2,\ 3 \pm \sqrt{3})$
- No hay intersección con ejes.

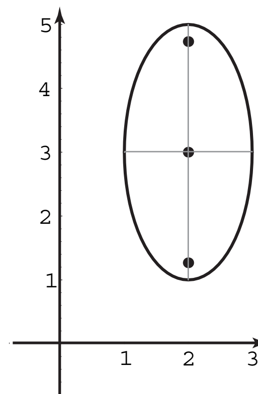


Figura 1.13

■ **EJEMPLO 1.14**

Hallar la ecuación canónica de la elipse con vértices en $(3,1)$, $(3,9)$ y eje menor de longitud 6.

Solución

Como la longitud del eje menor es de 6 unidades, entonces $b = 3$. Como los vértices están en $(3,1)$ y $(3,9)$, entonces el centro está en $(3,5)$, el eje mayor de la elipse es vertical y $a = 4$. Con lo cual

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \implies c = \sqrt{7}$$

Por último, la excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ y la ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

Los focos están en $\{3, 5 \pm \sqrt{7})\}$.En este caso no hay intersección con los ejes. La gráfica de la elipse se muestra en la figura

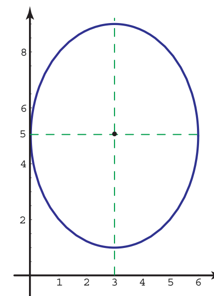


Figura 1.14

■ **EJEMPLO 1.15**

Determine la ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen, contiene al punto $(-1,3)$ y uno de sus vértices es $(0,5)$.

Solución

Los datos los podemos representar en la figura de la derecha. Como el centro es $(h,k) = (0,0)$ entonces la ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Esto es así pues el vértice $(0,5)$ nos indica que el eje mayor está (en este caso) sobre el eje Y.

Ahora, como $(0,5)$ es un vértice y el centro está en $(0,0)$, se sigue que $a = 5$ y

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{25} = 1$$

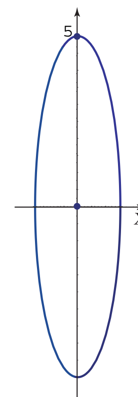


Figura 1.15

Por otra parte, como $(-1,3)$ está en la elipse

$$\frac{(-1)^2}{b^2}+\frac{3^2}{25}=1$$

de aquí, despejando, obtenemos $b^2=\frac{25}{16}$. Finalmente, la ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}}+\frac{y^2}{25}=1$$

■ **EJEMPLO 1.16**

La señora Rojas planeaba comprar un mantel para una mesa redonda que está arrinconada en la esquina de la sala. Para hacer la compra, le pidió a su pequeña hija que le tomara las medidas a esta mesa y se las apuntara en un papel. Cuando llegó al bazar, sacó el papel con las medidas de la mesa y lo que encontró fue ... la figura que sigue

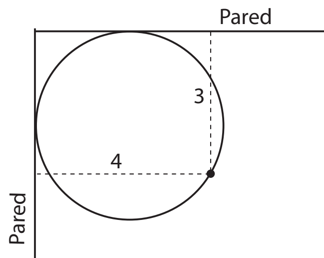


Figura 1.16

Como la señora Rojas había llevado Cálculo Superior algunos años atrás, rápidamente hizo un cálculo y pidió un mantel adecuado para el diámetro de la mesa. ¿Cuál es este diámetro?.

Solución.

Si consideramos las paredes como ejes coordenados, la mesa es un círculo de centro (r,r) y $(x,y)=(4,3)$ es un punto en la circunferencia.

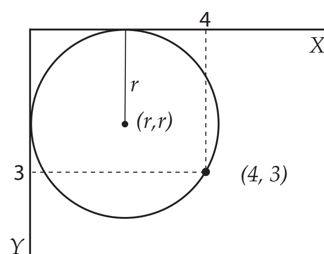


Figura 1.17

Por lo tanto

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = (4-r)^2+(3-r)^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow r \approx 2.1 \quad \text{o} \quad r \approx 11.8$$

Así que probablemente el diámetro de la mesa es $d \approx 4.20$.

■ **EJEMPLO 1.17**

Determine la ecuación de la circunferencia de radio 2 con centro en el vértice de la parábola de foco $(1,-1)$ y directriz $x=-3$.

Solución.

Como el vértice de una parábola está a la mitad del camino entre el foco y la directriz entonces $(h,k)=(-1,-1)$. La ecuación de la circunferencia es

$$(x+1)^2+(y+1)^2=4.$$

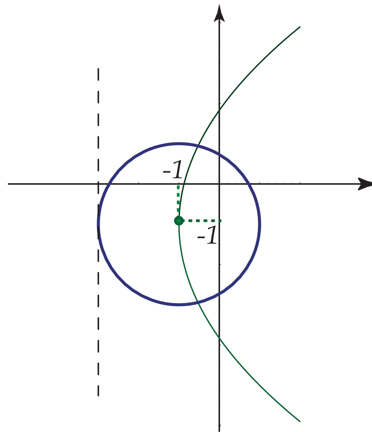


Figura 1.18

■ **EJEMPLO 1.18** $(*)$

Determine la ecuación canónica de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pasa por los puntos $(-1,0)$, $(3,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$.

Solución

Suponga que el centro de la elipse es (h,k). Si la elipse tiene eje horizontal su ecuación debe ser:

- Si la elipse tiene eje horizontal su ecuación tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Evaluando cada uno de los puntos, obtenemos el siguiente sistema:

(1) Si $x=-1,\ y=0 \implies \dfrac{(h+1)^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}=1$

(2) Si $x=3,\ y=0 \implies \dfrac{(3-h)^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}=1$

(3) Si $x=0,\ y=2 \implies \dfrac{h^2}{a^2}+\dfrac{(2-h)^2}{b^2}=1$

(4) Si $x=0,\ y=-2 \implies \dfrac{h^2}{a^2}+\dfrac{(2+h)^2}{b^2}=1$

De (3) y (4) obtenemos (5) $\dfrac{(2-h)^2}{b^2}=\dfrac{(2+h)^2}{b^2} \implies h=0$

De (1), (2) y (5) tenemos que $\dfrac{(h+1)^2}{a^2} = \dfrac{(3-h)^2}{a^2} \Longrightarrow \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{9}{a^2} \Longrightarrow 1 = 9$

Lo cual es falso. Esto nos dice que no existe una elipse de eje horizontal que pase por esos.

- Si la elipse tiene eje es vertical, su ecuación tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Sustituyendo cada uno de los obtenemos el siguiente sistema:

(6) Si $\quad x = -1, y = 0 \Longrightarrow \dfrac{(1+h)^2}{b^2} + \dfrac{k^2}{a^2} = 1$

(7) Si $\quad x = 3, y = 0 \Longrightarrow \dfrac{(3-h)^2}{b^2} + \dfrac{k^2}{a^2} = 1$

(8) Si $\quad x = 0, y = 2 \Longrightarrow \dfrac{h^2}{b^2} + \dfrac{(2-k)^2}{a^2} = 1$

(9) Si $\quad x = 0, y = -2 \Longrightarrow \dfrac{h^2}{b^2} + \dfrac{(2+k)^2}{a^2} = 1$

De (6) y (7) tenemos (10) $\quad (1+h)^2 = (3-h)^2 \Longrightarrow h = 1$

De (8) y (9) tenemos (11) $\quad (2-k)^2 = (2+k)^2 \Longrightarrow k = 0$

De (6), (8), (10) y (11) tenemos $\dfrac{4}{b^2} = 1$ y $\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{4}{a^2} = 1 \Longrightarrow b^2 = 4$ y $a^2 = \dfrac{16}{3}$.

Con lo cual la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{3y^2}{16} = 1$$

(*) Excentricidad.

La excentricidad es una medida de la “circularidad" de una elipse, entre más cerca de cero más circular y entre más cerca de uno más alargada.

Definición 1.3 (Excentricidad) *La excentricidad e de una elipse está dada por el cociente* $e = \dfrac{c}{a}$

Observe que al estar situados los focos en el eje mayor entre el centro y los vértices, siempre se tiene que

$$0 < c < a \Longrightarrow 0 < \frac{c}{a} < 1 \Longrightarrow 0 < e < 1$$

es decir, las elipses tienen una excentricidad menor a uno.

Para una elipse casi circular, los focos están cerca del centro y c/a es pequeño.Para una elipse alargada los focos están cerca de los vértices y c/a es casi 1.

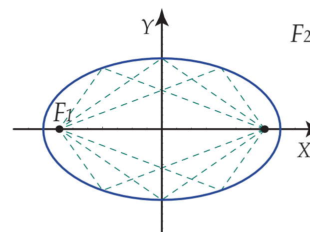
Esto explica la dificultad de los astrónomos en detectar las órbitas elípticas de los planetas, pues estas tienen los focos muy cerca de su centro, lo cual las hace casi circulares.La siguiente tabla muestra la excentricidad de las órbitas de los nueve planetas y la Luna.

Mercurio	$e =$ 0.2056	Saturno	$e =$ 0.00543
Venus	$e =$ 0.0068	Urano	$e =$ 0.0460
Tierra	$e =$ 0.0167	Neptuno	$e =$ 0.0082
Marte	$e =$ 0.0934	Plutón	$e =$ 0.2481
Jupiter	$e =$ 0.0484	Luna	$e =$ 0.0549

Una de las propiedades geométricas más interesante de la elipse afirma que : un rayo que emana de uno de los focos de la elipse y se refleja en ella pasa por el otro foco; esta propiedad se conoce como la propiedad reflectora.

Teorema 1.3 (Propiedad de reflexión)

La recta tangente a una elipse en un punto P forma ángulos iguales con las rectas que pasan por P y por alguno de los focos.



EJERCICIOS

1.16 Determinar la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(1,-2)$, eje mayor horizontal 8 y excentricidad $3/4$.

1.17 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(0,0)$, eje mayor horizontal y los puntos $(3,1)$ y $(4,0)$ están en la elipse.

1.18 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(2,1)$ y longitud de eje mayor de 5 y longitud del eje menor 2.

1.19 Hallar la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse que tiene un vértice y un foco en común con la parábola $x^2+y=100$ y que tiene su otro foco en el origen.

1.20 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse cuya suma de distancias a los puntos $(\pm 3, 0)$ es 16.

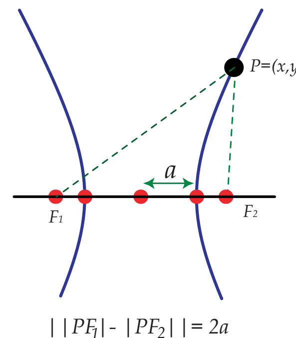
1.21 Determine la ecuación canónica de la elipse con focos en $(3, -3)$ y $(-3, 3)$ y eje mayor de longitud 10 (Nota : los focos de esta elipse no están en una recta vertical ni horizontal).

1.6 HIPÉRBOLA

Las hipérbolas aparecen en muchas situaciones reales, por ejemplo, un avión que vuela a velocidad supersónica paralelamente a la superficie de la tierra, deja una huella acústica hiperbólica sobre la superficie. La intersección de una pared y el cono de luz que emana de una lámpara de mesa con pantalla troncocónica, es una hipérbola.

La definición de la hipérbola como lugar geométrico es similar a la dada para la elipse, como vemos en seguida

Definición 1.4 (Hipérbola) *Una hipérbola es el conjunto de puntos $P = (x, y)$ para los que la* diferencia *de sus distancias a dos puntos distintos prefijados (llamados focos) es constante.*



• La recta que pasa por los focos corta a la hipérbola en dos puntos llamados *vértices*.

• El segmento recto que une los vértices se llama *eje transversal* y su punto medio es el *centro de la hipérbola*. Un hecho distintivo de la hipérbola es que su gráfica tiene dos partes separadas (llamadas *ramas*) y dos asíntotas oblicuas.

Teorema 1.4 (Ecuación canónica de la Hipérbola) *La ecuación canónica de la hipérbola con eje transversal horizontal y con centro en (h, k) es*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

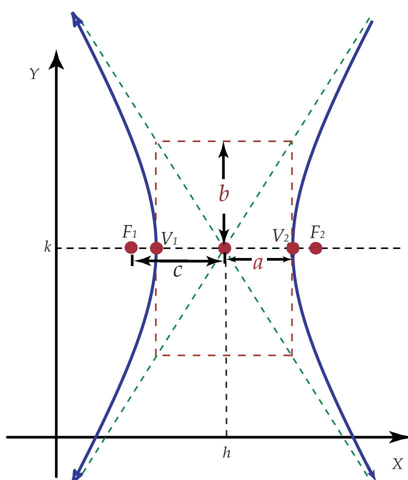


Figura 1.19

La ecuación canónica de la hipérbola con eje transversal vertical y con centro en (h,k) *es*

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$

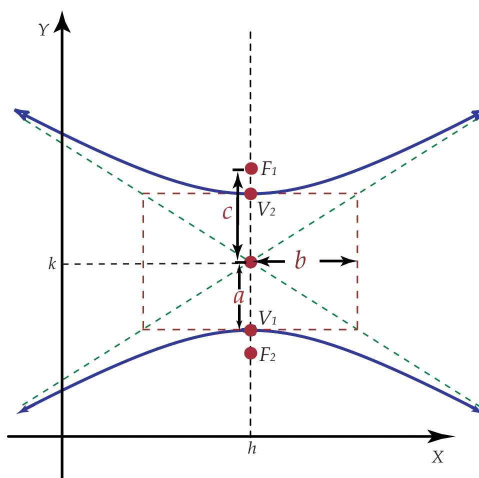
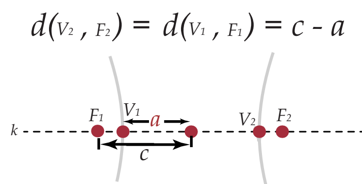


Figura 1.20

- Los vértices están a una distancia de "a" unidades del centro y los focos a una distancia de "c" unidades del centro con $c^2 = a^2 + b^2$

- La distancia entre cada vértice y el foco más próximo es $c-a$.



- En ambos casos, si F_1 y F_2 son los focos y si P es un punto de la hipérbola, entonces

$$||PF_1|-|PF_2||=2a$$

Esta igualdad es fácil de establecer si P es cualquiera de los vértices. En efecto, consideremos el caso de una hipérbola con eje transversal horizontal. En este caso $P=V_1=(h+a,k)$, $F_1=(h+c,k)$ y $F_2=(h-c,k)$. Luego

$$||PF_1|-|PF_2||=|\sqrt{(c-a)^2}-\sqrt{(c+a)^2}|$$

Como $c \geq a$ entonces $|\sqrt{(c-a)^2}-\sqrt{(c+a)^2}|=|c-a-a-c|=2a$.

Resumiendo:

Si el eje transversal de la hipérbola es horizontal entonces

- El centro está en (h,k)
- Los vértices están en $(h \pm a,k)$
- Los focos están en $(h \pm c,k)$.

Si el eje transversal de la hipérbola es vertical entonces

- El centro está en (h,k)
- Los vértices están en $(h,k \pm a)$.
- Los focos están en $(h,k \pm c)$.

Una ayuda importante para trazar la gráfica de una hipérbola son sus asíntotas. Toda hipérbola tiene dos asíntotas que se intersecan en su centro y pasan por los vértices de un

rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$ y centro en (h,k). El segmento recto de longitud $2b$ que une $(h,k+b)$ y $(h,k-b)$ se llama *eje conjugado* de la hiérbola. El siguiente teorema identifica la ecuación de las asíntotas.

Teorema 1.5 (Asíntotas de una hipérbola) *Si la hipérbola tiene un eje transversal horizontal* $\left(\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\right)$ *las ecuaciones de las asíntotas son*

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$$

y si el eje transversal es vertical $\left(\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1\right)$ *las ecuaciones de las asíntotas son*

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$$

Las asíntotas de la hipérbola coinciden con las diagonales del rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$ centro (h,k). Esto sugiere una forma simple de trazar tales asíntotas.

(*) Excentricidad.

Definición 1.5 (Excentricidad de una hipérbola) *La excentricidad e de una hipérbola está dada por el cociente*

$$e = \frac{c}{a}$$

Si la excentricidad es grande, los focos están cerca del centro y las ramas de la hipérbola son casi rectas verticales. Si la excentricidad es cercana a uno los focos están lejos del centro y la ramas de la hipérbola son más "puntiagudas".

La propiedad reflectora de la hipérbola afirma que un rayo de luz dirigido a uno de los focos de una hipérbola se refleja hacia el otro foco (figura 2).

Teorema 1.6 (Propiedad de reflexión) *La tangente en un punto a de una hipérbola es la bisectriz del ángulo formado por lo segmentos que unen este punto con los focos.*

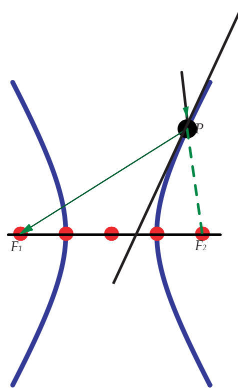


Figura 1.21

■ **EJEMPLO 1.19**

Determine la ecuación canónica y las características más importantes de la cónica que contiene a los puntos $P=(x,y)$ para los cuales $|d(P,A)-d(P,B)|=2$ donde $A=(-3,0)$ y $B=(-3,3)$.

Solución.

Se trata de un hipérbola con focos A y B. Así que el centro es $(h,k)=(-3,3/2)$. Como $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$ entonces $a=1$. Por otra parte $c=1.5$ y entonces $b^2=5/4$ Luego ecuación canónica es

$$\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1}-\frac{(x+3)^2}{5/4}=1$$

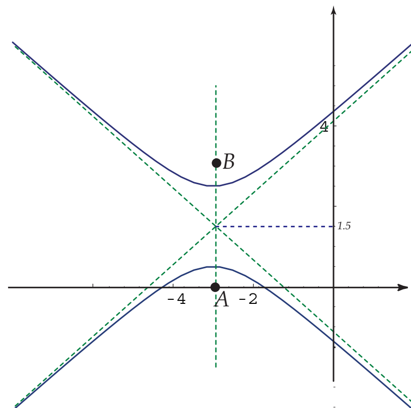


Figura 1.22

■ **EJEMPLO 1.20**

Hallar la ecuación canónica, los focos, los vértices, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es

$$9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$$

Solución

Completando el cuadrado en ambas variables

$$\begin{aligned} 9\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) - \left(y^2 + 6y + 9 - 9\right) + 18 &= 0 \\ 9(x-2)^2 - (y+3)^2 &= 9 \\ \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, el centro está en $(2,-3)$. El eje de la hipérbola es horizontal, $a = 1, b = 3$ y

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies c^2 = 10 \implies c = \sqrt{10}$$

Los vértices están en $(1,-3)$, $(3,-3)$, los focos en $(2 \pm \sqrt{10}, -3)$ y $(2, -3 - \sqrt{13}$ y la excentricidad es $e = \sqrt{10}$. La gráfica se muestra en la figura 3.

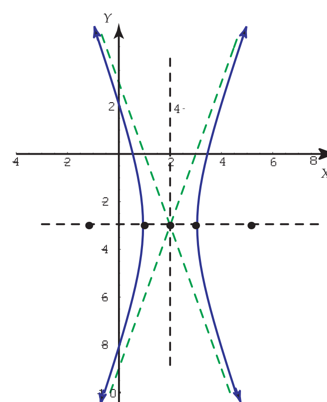


Figura 1.23

■ **EJEMPLO 1.21**

Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(3,-5)$ y $(3,1)$ y asíntotas $y = 2x - 8$ y $y = -2x + 4$. Además calcule los focos, la excentricidad y trace la gráfica.

Solución

Por ser el centro el punto medio de los vértices sus coordenadas son $(3,\ -2)$. Además, la hipérbola tiene eje transversal vertical y $a = 3$. Por otro lado, por el teorema de las asíntotas.

$$m_1 = 2 = \frac{a}{b} \implies b = \frac{a}{2} \implies b = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

El valor de c está dado por

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies c^2 = \frac{45}{4} \implies c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Los focos están en $(3, -2 - \frac{3\sqrt{5}}{2})$ y $(3, -2 + \frac{3\sqrt{5}}{2})$ y la excentricidad es $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$. La gráfica se muestra en la figura 4.

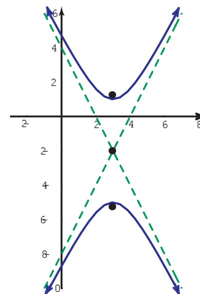


Figura 1.24

■ **EJEMPLO 1.22**

Identifique y trace la gráfica de la cónica de ecuación

$$4y^2 - 9x^2 + 36x - 24y - 36 = 0$$

indicando centro, vértices, focos, asíntotas e intersección con los ejes.

Solución.

Completando cuadrados obtenemos

$$4(y-3)^2 - 9(x-2)^2 = 36$$

por lo que la ecuación canónica es

$$\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

Se trata de un hipérbola con eje transversal vertical y centro en $(2,3)$. Como $a = 4$ y $b = 2$ entonces $c = \sqrt{13}$. Los vértices son $v_1 = (2,0)$ y $v_2 = (2,6)$ y los focos son $F_1 = (2, -\sqrt{13})$ y $F_2 = (2+6+\sqrt{13})$.

Interseca al eje y en $y \approx -1.24$ y $y \approx 7.24$. La intersección con el eje x es en $x = 2$.

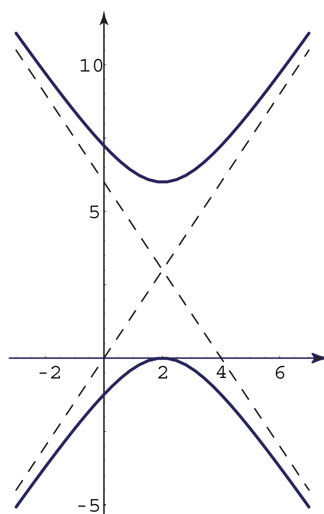


Figura 1.25

EJERCICIOS

1.22 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la hipérbola tal que para cualquier punto sobre ella la diferencia entre sus distancias a los puntos $(-3,0)$ y $(-3,3)$ es 2.

1.23 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la hipérbola con vértices en $(0,2)$ y $(6,2)$ y asíntotas en $y = 2/3x \wedge y = 4 - 2/3x$.

1.24 Hallar el valor de a de forma que la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$$

sea tangente a la recta $2x - y = 4$.

1.25 Determine el tipo de cónica representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-16} = 1$$

en los casos

a.) Si $k > 16$

b.) Si $0 < k < 16$

c.) Si $k < 0$

1.26 Determine la excentricidad de la cónica con ecuación:

$$3x^2 - y^2 + 12x + 9 = 0$$

1.7 (*) ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Como hemos visto la ecuación canónica de las secciones cónicas tiene la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes. Este tipo de ecuación se conoce como ecuaciones de segundo grado en xy. Otra manera de introducir las secciones cónicas es por medio de este tipo de ecuaciones, pues sus gráficas corresponden, en general, con las secciones cónicas estudiadas.

Definición 1.6 (Ecuación de segundo grado) *Una ecuación de la forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes, se conoce como ecuación de segundo grado en xy.

Observación: La gráfica de este tipo de ecuaciones corresponde a una sección cónica y la presencia del término mixto "xy" nos indica que hay rotación de ejes. Tema que se sale de los objetivos del presente curso y no será tratado en detalle, pero aún así, se presentará el teorema relacionado y un ejemplo.

Teorema 1.7 (Rotación de ejes) *La ecuación de segundo grado*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.1}$$

puede reescribirse como

$$Pu^2 + Qv^2 + Ru + Sv + T = 0 \tag{1.2}$$

girando los ejes coordenados un ángulo θ, donde

$$ctg\,\theta = \frac{A-C}{B}$$

Los coeficientes de la nueva ecuación se obtienen haciendo las sustituciones:

$$\begin{aligned} x &= u\cos\theta - v\,sen\,\theta \\ y &= u\,sen\,\theta + v\cos\theta \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 1.23**

Hallar la ecuación canónica de la cónica

$$7x^2 - 6xy\sqrt{3} + 13y^2 - 16 = 0$$

y trazar su gráfica.

Solución.

Primero debemos calcular el ángulo de rotación

$$\text{ctg}\,\theta = \frac{7-13}{-6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = \frac{\pi}{6}$$

Por tanto, el cambio de variable a realizar está dado por

$$\begin{aligned} x &= \frac{u\sqrt{3}-v}{2} \\ y &= \frac{u+v\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación original (2), obtenemos la ecuación canónica deseada:

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{1} = 1$$

La gráfica de está elipse se muestra en la figura 1.

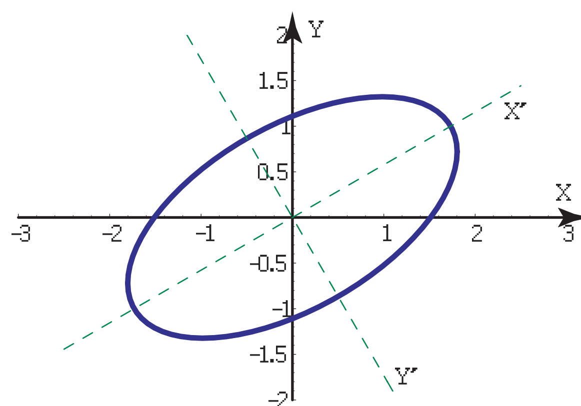


Figura 1.26

Ligada a la ecuación de segundo grado existe una cantidad conocida como discriminante que es útil en la clasificación de cónicas.

Definición 1.7 (Discriminante) *El discriminante de la ecuación de segundo grado (1.1) está dado por*

$$D = B^2 - 4AC$$

El siguiente teorema nos permite clasificar las cónicas basándose en el signo del discriminante.

Teorema 1.8 (Secciones cónicas) *La gráfica de una ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a, (salvo casos degenerados), una sección cónica:*

a.) Si $D < 0$, la gráfica es una elipse.

b.) Si $D = 0$, la gráfica es una parábola.

c.) Si $D > 0$, la gráfica es una hipérbola.

■ **EJEMPLO 1.24**

Las gráficas de las siguientes ecuaciones de segundo grado corresponden a cónicas no degeneradas. Clasifique cada cónica.

1.) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5y\sqrt{5} + 1 = 0$

2.) $7x^2 - 6xy\sqrt{3} + 13y^2 - 16 = 0$

3.) $x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$

Solución.

Como las ecuaciones corresponden a cónicas no degeneradas, se puede afirmar que

1.) Como $\Delta = (-4)^2 - 4\,1\,4 = 0 \implies$ la cónica es una parábola

2.) Como $\Delta = \left(-6\sqrt{3}\right)^2 - 4\,7\,13 = -256 \implies$ la cónica es una elipse

3.) Como $\Delta = (-10)^2 - 4\,1\,1 = 96 \implies$ la gráfica es una hipérbola.

EJERCICIOS

1.27 Otra forma de definir las secciones cónicas es la siguiente:

Sea F un punto fijo (llamado foco) y L una recta fija (llamada directriz) en un plano. Sea e un número positivo fijo (llamado excentricidad). El conjunto de todos los puntos P del plano tales que

$$\frac{|PF|}{|PL|} = e$$

(es decir, el cociente de la distancia con respecto a F y la distancia respecto a L es igual a la constante e) es una sección cónica. Compruebe que la cónica es :

a) una elipse si $e < 1$

b) una parábola si $e = 1$

c) una hipérbola si $e > 1$

1.28 ¿ Es la curva de ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, con $a > 0$ una parábola?

1.29 Determine la excentricidad de la cónica con ecuación $3x^2 - y^2 + 12x + 9 = 0$

Capítulo 2

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES, SUPERFICIES Y SÓLIDOS.

2.1 COORDENADAS TRIDIMENSIONALES

Un punto en el espacio queda determinado dando su localización con respecto a tres ejes de coordenadas perpendiculares entre sí que pasan por el origen O. Siempre trazaremos los ejes x, y, z como se muestra en la figura 2.2, con flechas que indican la dirección positiva a lo largo de cada eje. Con esta configuración de ejes nuestro sistema de coordenadas es un sistema 'derecho'; si usted dobla los dedos de su mano derecha en la dirección de un giro de 90° desde el eje x positivo hasta el eje y positivo, entonces su pulgar apunta en la dirección del eje z positivo. Si se intercambian los ejes x e y, entonces el sistema de coordenadas sería 'izquierdo'. Estos dos sistemas de coordenadas son diferentes, en el sentido de que es imposible hacerlos coincidir por medio de rotaciones y traslaciones.

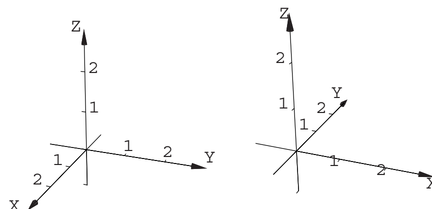


Figura 2.1 Ejes x, y, z

Los tres ejes coordenados considerados por pares determinan los tres planos coordenados:

- El plano (horizontal) xy, donde $z = 0$
- El plano (vertical) yz, donde $x = 0$
- El plano (vertical) xz, donde $y = 0$

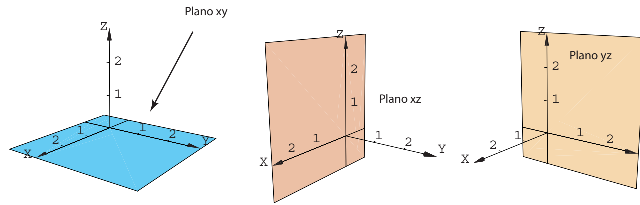


Figura 2.2 Ejes x, y, z

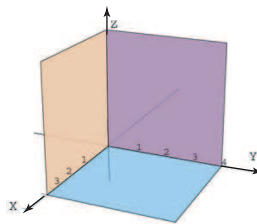


Figura 2.3 Primer octante.

El punto P en el espacio tiene las coordenadas rectangulares (a,b,c) si

- a es su distancia (con signo) al plano yz
- b es su distancia (con signo) al plano xz
- c es su distancia (con signo) al plano xy

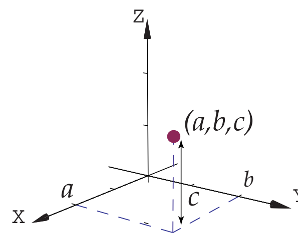


Figura 2.4 Punto $P = (a,b,c)$ en el primer octante

En este caso, podemos describir la posición del punto P simplemente escribiendo $P = (a,b,c)$. Existe una correspondencia biunívoca natural entre las ternas ordenadas (x,y,z)

de números reales y los puntos P del espacio; esta correspondencia es un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio. En la figura 2.4 se muestra un punto P en el primer octante, la octava parte del espacio en donde las tres coordenadas rectangulares son positivas.

2.2 FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Muchas magnitudes que nos resultan familiares son funciones de dos o más variables independientes. Por ejemplo, el trabajo w realizado por una fuerza $w = f \cdot d$, el volumen V de un cilindro circular recto $V = V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$, el área de un triángulo $A = b \cdot h$, son todas funciones de dos variables. También tenemos funciones de tres variables, como el volumen de una caja rectangular $V = V(l,a,h) = l \cdot a \cdot h$ es una función de tres variables.

Denotaremos una función de dos o más variables de la forma usual

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) &= x^2 + y^2 + 1 \\ w &= f(x,y,z) &= xyz \end{aligned}$$

Definición 2.1 (Funciones de dos variables) *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$, si a cada par ordenado $(x,y) \in D$ hacemos corresponder un número real $z = f(x,y)$, entonces decimos que f es una función de x e y, y escribimos $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Al conjunto D lo llamaremos dominio de f y al correspondiente conjunto de valores $z = f(x,y)$ lo llamaremos recorrido de f. Llamaremos a las variables x e y variables independientes y a la variable z variable dependiente.*

Observación : De manera análoga podemos definir funciones de tres o más variables, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En todo caso el dominio será un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y el recorrido un subconjunto de $\mathbb{R}$. En nuestro curso nos limitaremos ha estudiar los casos $n = 2, 3$.

■ **EJEMPLO 2.1**

Hallar y dibujar el dominio de las siguientes funciones

1. $f(x,y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$

2. $g(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - y}}$

Solución

• Para hallar el dominio de f recuerde que el argumento de una raíz cuadrada debe ser positivo o cero :

$$9-\left(x^2+y^2\right)\geq 0 \Longrightarrow x^2-y\leq 9$$

Lo cual corresponde al interior de un círculo de radio 3, como se muestra en la figura 2.5

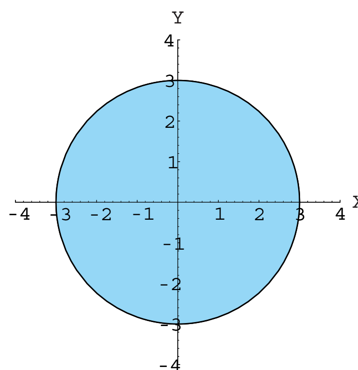


Figura 2.5 Círculo de radio 3

• Para hallar el dominio de g recuerde que en un cociente el denominador no puede ser cero, por lo que el argumento del radical debe ser positivo :

$$x^2-y>0 \Longrightarrow y<x^2$$

Lo cual corresponde al exterior de la parábola $y=x^2$, sin incluir la parábola misma, esto se muestra en la figura 2.6.

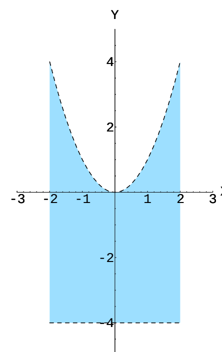


Figura 2.6 Exterior de la parábola $y=x^2$

Las funciones de varias variables pueden combinarse de la misma forma que lo hacemos con las funciones de una variable

- Suma y resta: $f(x,y)\pm g(x,y)$
- Producto: $f(x,y)\cdot g(x,y)$
- Cociente: $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$

La función compuesta dada por $(f\circ g)(x,y)$ se define solamente si g es una función de dos variables y f una función de una única variable. En este caso

$$(f\circ g)(x,y)=f(g(x,y))$$

para todo par (x,y) en el dominio de g. Por ejemplo, la función

$$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$$

puede verse como la composición de la función de dos variables

$$g(x,y) = x^2+y^2+4$$

y la función de una variable

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Una función que puede expresarse como suma de funciones de la forma $c\,x^m\,y^n$ (donde c es un número real, m, n son enteros positivos) se conoce como función polinómica de dos variables. Por ejemplo, la función

$$f(x,y) = x^2 + x\,y^2\,3x^2\,y^2 + 5$$

es una función polinómica.

Y una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas.

■ **EJEMPLO 2.2**

Determine el dominio de la función

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$

Solución

Como cada uno de los radicales debe ser no negativo, tenemos que

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

Lo cual corresponde al anillo que se muestra en la figura 2.7.

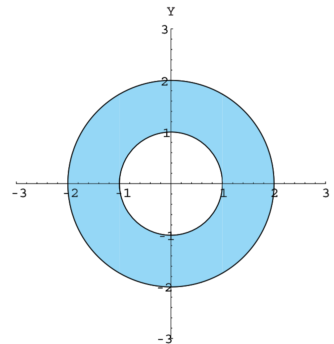


Figura 2.7 Dominio de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$

2.3 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES.

Existen varias maneras de visualizar una función de dos variables, en esta sección lo haremos mediante una superficie en el espacio tridimensional.

Definición 2.2 (Gráfica de una función de dos variables) *La gráfica de una función* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *es el conjunto de puntos* (x,y,z) *tales que* $z = f(x,y)$ *y* $(x,y) \in D$*. Es decir,*

$$Graf(f) = \{(x,y,f(x,y)) \,|\, (x,y) \in D\}$$

Observación : La gráfica de una función de dos variables $z = f(x,y)$ puede interpretarse geométricamente como una superficie S en el espacio, de forma tal que su proyección sobre el plano xy (intuitivamente: la sombra cuando el sol está sobre el eje Z) es D, el dominio de f. En consecuencia, a cada punto (x,y) en D le corresponde un punto (x,y,z) en la superficie. Y, a la inversa, a cada punto (x,y,z) en la superficie le corresponde un punto (x,y) en D (figura 2.8)

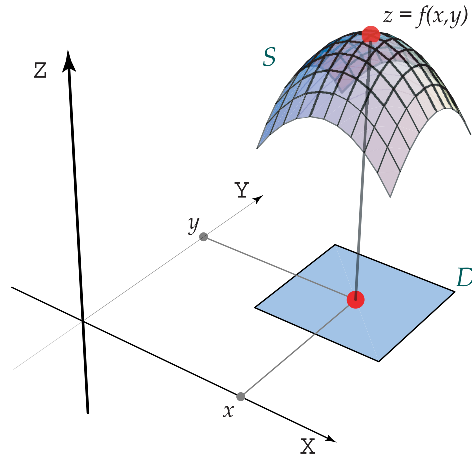


Figura 2.8 Gráfica de una función de dos variables

Más adelante volveremos sobre este tema, cuando tengamos más elementos acerca de curvas, planos, cilindros, curvas de nivel y trazas.

2.4 PLANOS Y RECTAS EN EL ESPACIO

Una recta L en el espacio está determinada por dos puntos P y Q sobre ella. Alternativamente, se puede determinar dando un punto P sobre ella y un vector (director) $\overrightarrow{PQ}$ que determina la dirección de la recta (Figura 2.9)

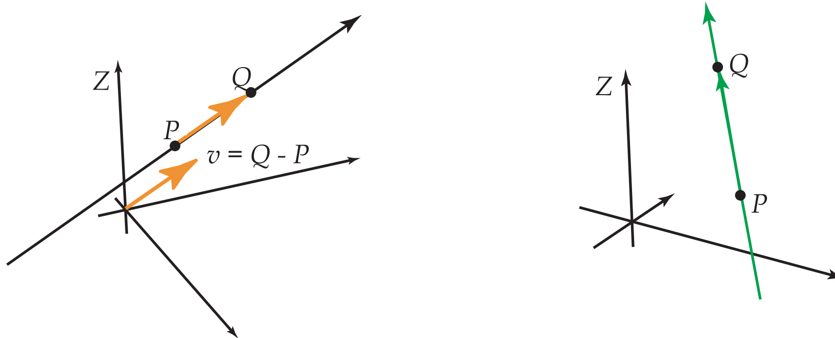


Figura 2.9 Recta en el espacio

Los ejemplos más simples son rectas en los planos xy, yz o xz. En estos casos podemos dibujar directamente a partir de la ecuación cartesiana $ax+by=d$, $ay+bz=d$ o $ax+bz=d$ respectivamente.

■ **EJEMPLO 2.3**

Dibujar las rectas

1. $x+y=1$.
2. $x+2z=2$.
3. $z-y=0$.

Solución.

Para dibujar una recta solo necesitamos dos puntos.

En el caso de la recta $x+y=1$ observamos que interseca a los ejes en $x=1$ y $y=1$.

En el caso de la recta $x+2z=2$ observamos que interseca a los ejes en $x=2$ y $z=1$.

En el caso de la recta $z-y=0$ observamos que interseca a los ejes en $x=y=0$. Un punto adicional de la recta se puede obtener haciendo $z=1$ en cuyo caso tendríamos el punto $(0,1,1)$. Aquí la coordenada x es cero pues estamos en el plano yz.

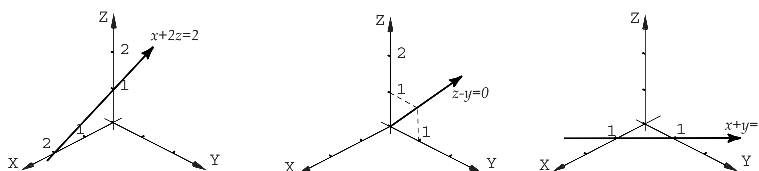


Figura 2.10 Recta en el espacio

Teorema 2.1

La ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}=(a,b,c)$ es

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

■ **EJEMPLO 2.4**

Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $P=(2,0,1)$ y $Q=(1,1,3)$ y trace su gráfica.

Solución

Un vector director para la recta está dado por $\overrightarrow{PQ} = (-1,1,2)$ y su ecuación paramétrica es

$$\begin{cases} x = 2 - 1t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Para trazar su gráfica basta dibujar dos puntos y luego unirlos, como se muestra en la figura 2.11.

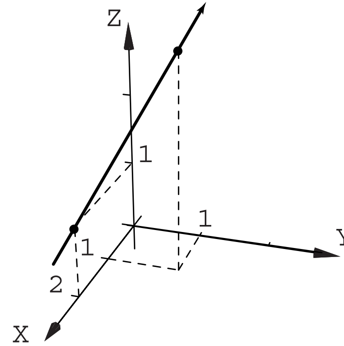


Figura 2.11 Recta en el espacio con puntos $P = (2,0,1)$ y $Q = (1,1,3)$

2.4.1 Planos

Un plano Π en el espacio queda determinado por un punto $Q = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ y un vector normal $\overrightarrow{n} = (a,b,c)$ al plano Π. También, tres puntos no colineales $P,Q,R \in \Pi$ determinan este plano (Figura 2.12).

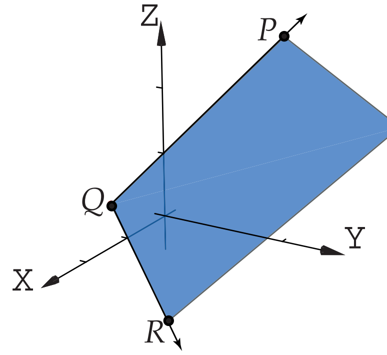


Figura 2.12 Plano en el espacio

Teorema 2.2

Una ecuación escalar de un plano Π que pasa por el punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ con vector normal $\overrightarrow{n} = (a,b,c)$ está dada por

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \text{ o sea, } ax + by + cz = d$$

con $P = (x,y,z)$ y $d = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{Q} = ax_0 + by_0 + cz_0$

■ **EJEMPLO 2.5**

Determine la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por los puntos $P=(3,0,0)$, $Q=(2,1,0)$ y $R=(0,1,2)$ y trace su gráfica.

Solución

Primero debemos calcular un vector normal

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$$

y así la ecuación del plano es

$$(2,2,2)\cdot(x-3,y,z)=0\Longrightarrow x+y+z=3$$

Para trazar la gráfica buscamos las intersecciones con los ejes coordenados y las unimos con rectas, como se muestra en la figura 2.13
• Intersección con el eje x:
Si $y=z=0\ \Rightarrow\ x=3$ y obtenemos el punto $(3,0,0)$
• Intersección con el eje y:
Si $x=z=0\ \Rightarrow\ y=3$ y obtenemos el punto $(0,3,0)$
• Intersección con el eje z:
Si $x=y=0\ \Rightarrow\ z=3$ y obtenemos el punto $(0,0,3)$.

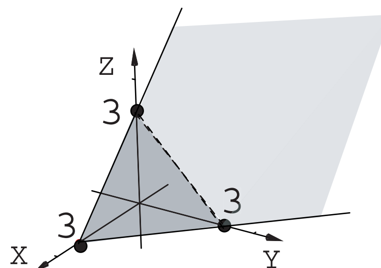


Figura 2.13 Plano $x+y+z=3$

En la figura 2.13 se indica con un tono más claro la parte del plano que está en el segundo octante. La línea punteada es la intersección del plano Π con el plano yz.

El siguiente ejemplo muestra como dibujar un plano que pasa por el origen.

■ **EJEMPLO 2.6**

Trace la gráfica del plano $\Pi:\ x-y-z=0$.

Solución

En este caso buscamos la "traza"(intersección) del plano sobre cada uno de los planos coordenados.

• Traza sobre el plano $x = 0$:

Si $x = 0 \Rightarrow -y - z = 0 \Rightarrow y = -z$

• Traza sobre el plano $y = 0$:

Si $y = 0 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow z = x$

• Traza sobre el plano $z = 0$:

Si $z = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$

Para trazar la gráfica del plano dibujamos solo dos trazas (rectas, en este caso) de las tres trazas (en principio no importa cuales dos se escojan) y estas nos dan una idea del plano, aquí escogimos las trazas $y = 0$ (recta $x = z$) y $z = 0$ (recta $y = x$), como se muestra en la figura 2.14.

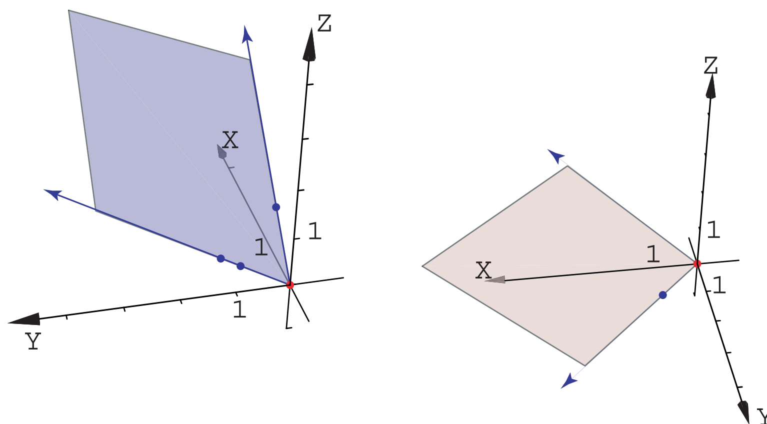


Figura 2.14 Plano $x - y - z = 0$, en dos posibles puntos de vista.

El siguiente ejemplo muestra como trazar un plano cuando una de las variables está ausente.

■ **EJEMPLO 2.7**

Trace la gráfica del plano $y + z = 3$.

Solución

En este caso tenemos una variable que no aparece en la ecuación :x, entonces el proceso para trazar el plano es muy simple; dibujamos la traza del plano $y+z=3$ sobre el plano $x=0$ (plano yz) y luego la desplazamos en la dirección del eje x, como se muestra en la figura 2.15. Esto se puede hacer así pues x puede tomar valores arbitrarios ya que en la ecuación del plano, x esta multiplicada por cero, es decir la ecuación del plano se puede escribir como $0\cdot x+y+z=3$. De hecho, el gráfico de plano es $\{(x,y,z) : y+z=3,\ x\in\mathbb{R}\}$.

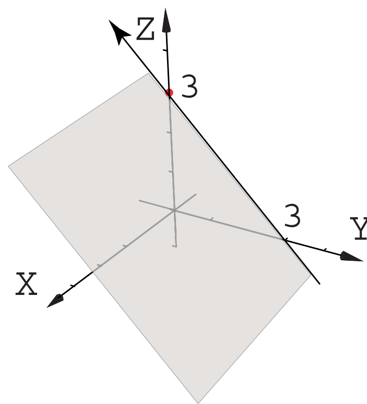


Figura 2.15 Plano $y+z=3$

2.5 SUPERFICIES CILÍNDRICAS

Una buena parte de las superficies con las que trabajaremos en el curso se generan a partir de una curva que se mueve en el espacio (llamada generatriz), siguiendo una trayectoria determinada (llamada directriz) . Trazar la gráfica de una superficie de este tipo es muy simple, la idea es arrastrar la generatriz en la dirección de la directriz, el movimiento de la generatriz forma la superficie por la traza que va dejando.

Definición 2.3 (Cilindro) *Sea C una curva sobre un plano Π, llamada* generatriz *y sea L una recta no paralela al plano Π, llamada* directriz. *Entonces el conjunto de todos los puntos en las rectas paralelas a L que intersecan a C es un* cilindro.

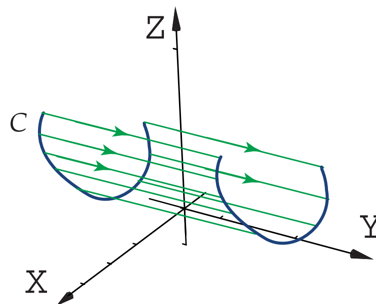


Figura 2.16 Cilindro

Observación : Esta definición es una generalización del conocido cilindro circular recto donde, por ejemplo, la generatriz es $x^2+y^2=r^2$ que esta sobre el plano xy y la directriz es una recta paralela al eje z. Para los fines del curso, vamos a estar interesados únicamente en cilindros cuyas curvas generatrices están sobre planos paralelos a los planos coordenados y cuyas directrices son rectas paralelas a alguno de los ejes coordenados. Este tipo de cilindros se conoce como cilindros rectos. Cuando la directriz es una recta que no es paralela a alguno de los ejes coordenados el cilindro generado se conoce como oblicuo. Por ejemplo, considere el siguiente cilindro (Figura 2.16)

Un cilindro circular recto tiene como generatriz un círculo y como directriz una recta paralela a uno de los ejes coordenados. En la figura 2.17 se muestra un cilindro con generatriz; $x^2+z^2=4,\ \ y=0$ (plano xz) y con recta directriz paralela al eje y.

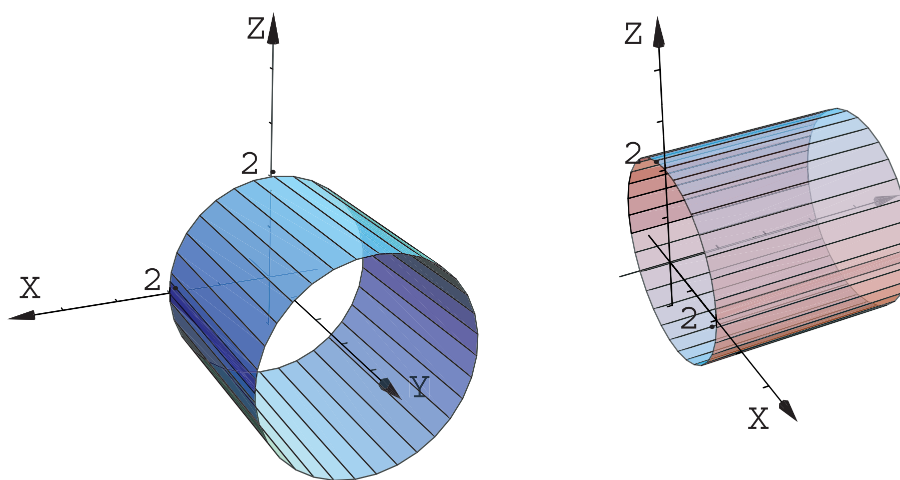


Figura 2.17 Cilindro con generatriz $x^2+z^2=4$

En la figura 2.18 se muestra un cilindro parabólico $z=x^2+1,\ \ y=0$ (plano xz) con generatriz y recta directriz paralela al eje Y

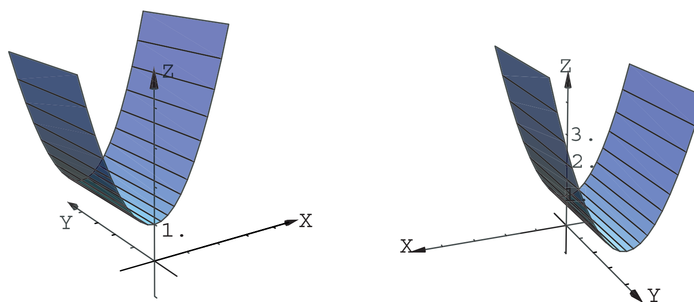


Figura 2.18 Cilindro parabólico

Si en la ecuación:

$$f(x,y,z) = 0$$

alguna de las variables x, y o z es libre (no aparece en la ecuación), entonces su gráfica corresponde a un cilindro y trazarla resulta muy simple : primero dibujamos la traza de la superficie $f(x,y,z) = 0$ sobre el plano coordenado correspondiente a las variables no libres y luego movemos esta curva en la dirección del eje coordenado correspondiente a la variable libre. Ahora presentamos algunos ejemplos que ilustran esta técnica.

■ **EJEMPLO 2.8**

Trazar la gráfica de la superficie cilíndrica cuya ecuación está dada por:

$$z = 4 - y^2$$

Solución

Observando la ecuación $z = 4 - y^2$ notamos que la variable libre es x, esto nos dice que debemos dibujar la traza (es decir, la parábola $z = 4 - y^2$) de la superficie sobre el plano $x = 0$ (plano yz) y luego mover esta traza a lo largo del eje x para generar la gráfica de la superficie, como se muestra en la figura 2.19.

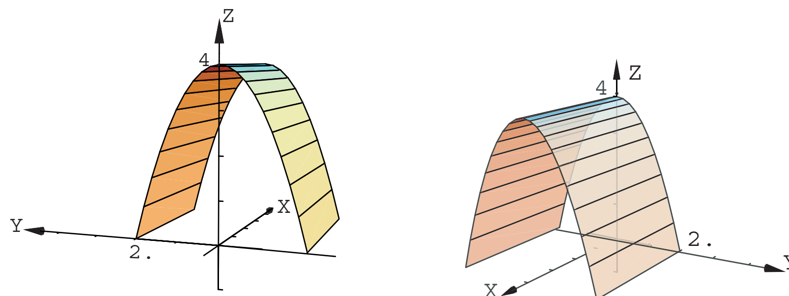


Figura 2.19 Parábola de ecuación $z = 4 - x^2$

Observación : el dominio de la función $z = 4 - y^2$ es $\mathbb{R}^2$, esto es un aspecto importante al trazar su gráfica.

■ **EJEMPLO 2.9**

Trace la gráfica de la superficie cilíndrica $y = \sqrt{x}$

Solución

En este caso la variable libre es z, entonces debemos dibujar la traza (es decir la curva $y = \sqrt{x}$) de la superficie sobre el plano $z = 0$ (plano xy) y luego debemos moverla a lo largo del eje z. En este caso es muy importante tomar en cuenta que el dominio de la función es $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | \ x \geq 0\}$, es decir, sólo sobre esta región vamos a tener gráfica. En la figura 2.20 se muestra la esta superficie.

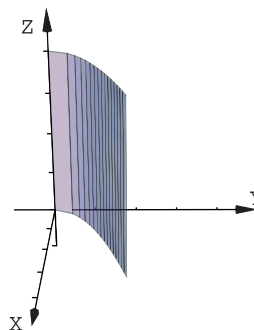
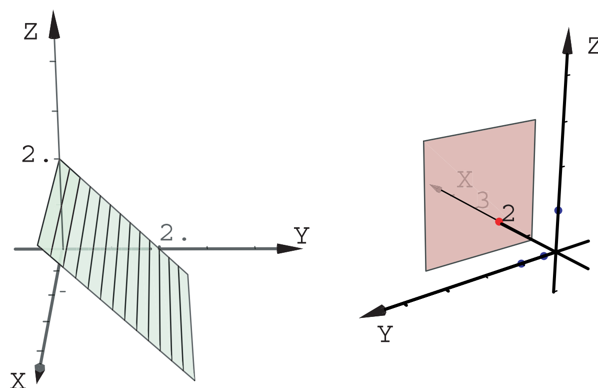


Figura 2.20 Superficie cilíndrica $y = \sqrt{x}$

■ **EJEMPLO 2.10**

Incluso los planos pueden verse como superficies cilíndricas, por ejemplo, el plano $z = 2 - y$ tiene una variable libre x, entonces dibujamos la traza de la superficie sobre el planos $x = 0$ (plano yz) y la movemos a lo largo del eje x. Un plano como $x = 2$, tiene dos variables libres y y z, entonces dibujamos la traza ($x = 2$) sobre el plano yz y la movemos a lo largo del eje x.

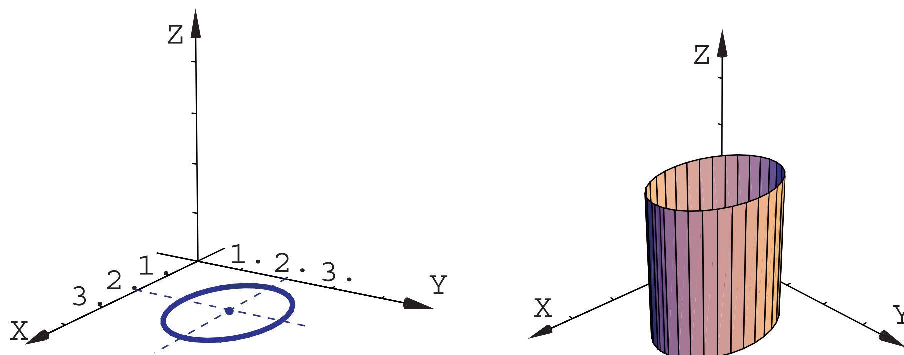


■ **EJEMPLO 2.11**

Trazar la gráfica de la superficie cilíndrica $\dfrac{(x-2)^2}{2} + (y-2)^2 = 1$

Solución

La variable libre es z, entonces dibujamos la traza sobre el $z = 0$ (plano xy) y la desplazamos a lo largo del eje z, como se muestra en la figura



2.6 CURVAS SOBRE UN PLANO

Una curva sobre un plano $x = a$, $y = b$, o $z = c$ se describe dando la ecuación de la curva y el plano sobre la cual se encuentra. Eventualmente, estas curvas corresponden una "traza" sobre el plano $x = a$, $y = b$, o $z = c$.

Una manera sencilla de dibujar estas curvas es dotar al plano respectivo de un sistema de ejes con origen en "a" y dibujar en este sistema coordenado. Por ejemplo, si queremos dibujar en el plano $x = a$ una curva de ecuación $F(y,z) = 0$, dotamos a este plano de un sistema de ejes $y'z'$ con origen de coordenadas en $x = a$ y dibujamos la curva $F(y',z') = 0$.

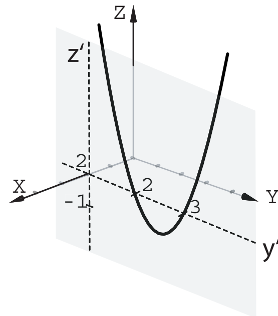
■ **EJEMPLO 2.12**

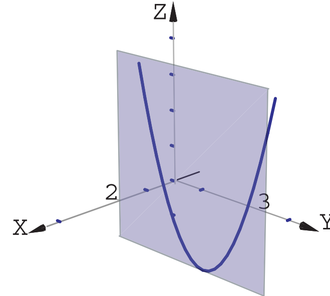
Dibujar las siguientes curvas:

1. Parábola $(y-3)^2 = z+1$ sobre el plano $x = 2$
2. Circunferencia $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ sobre el plano $z = 0$ (plano xy)
3. Elipse $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$ sobre el plano $z = 3$
4. Hipérbola $\dfrac{(x-3)^2}{4} - (z-2)^2 = 1$ sobre el plano $y = 3$

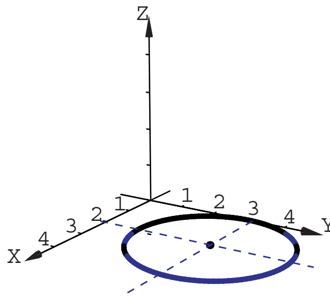
Solución

1. Parábola

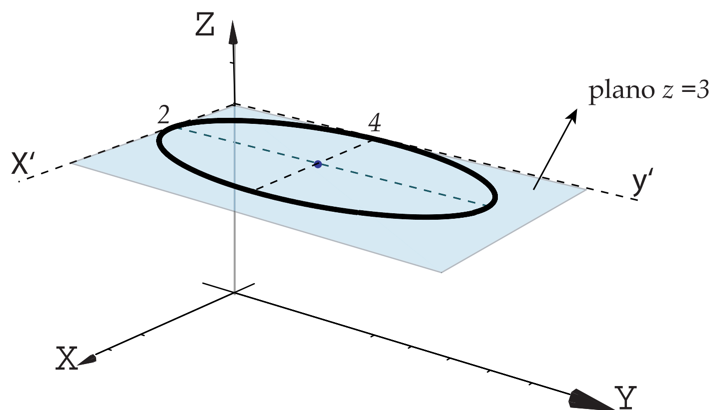




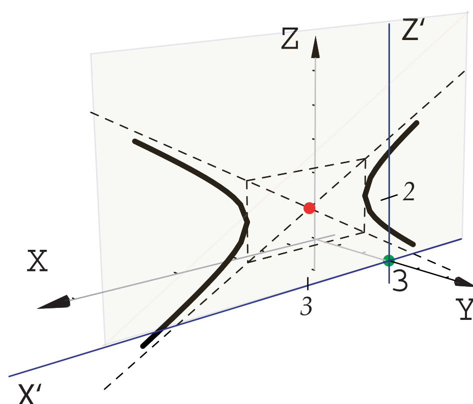
2. Circunferencia

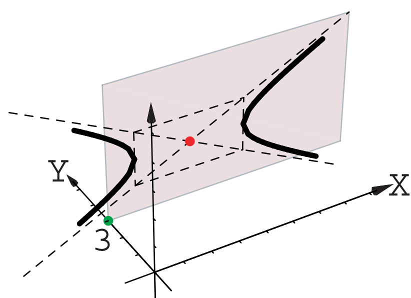


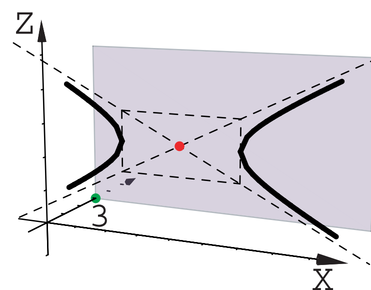
3. Elipse



4. Hipérbola







2.7 CURVAS DE NIVEL Y TRAZAS

La intersección del plano horizontal $z = k$ con la superficie $z = f(x,y)$ se le llama una *curva de contorno* (o *traza*) de altura k sobre la superficie.

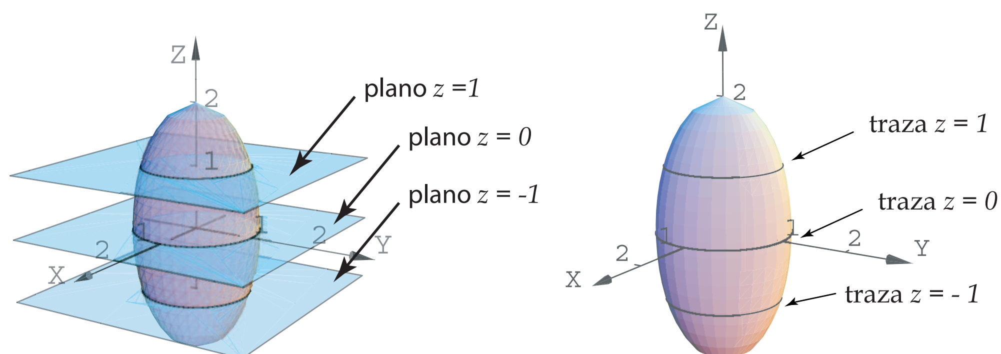


Figura 2.21 Curvas de contorno

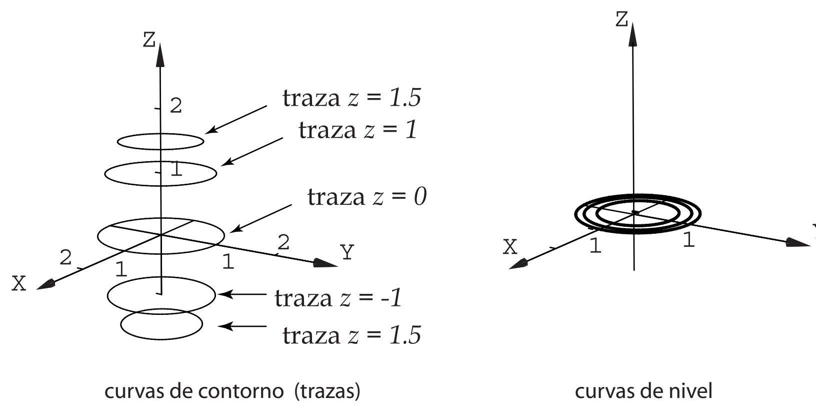


Figura 2.22 Curvas de contorno y Curvas de nivel

En la sección anterior ya vimos como dibujar una curva sobre cada uno de estos planos.

Más generalmente, tenemos la siguiente definición

Definición 2.4 *Sea* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$. *El conjunto de nivel del valor* c *se define como los puntos* $v \in U$ *para los cuales* $f(v) = c$. *Si* $n = 2$ *hablamos de una* curva de nivel *de valor* c; *y si* $n = 3$ *hablamos de una* superficie de nivel.

En una superficie de ecuación $F(x,y,z) = 0$ se pueden considerar, además de la intersección con los planos $z = k$, también la intersección de ésta con los planos $x = k$ o los planos $y = k$.

■ **EJEMPLO 2.13**

Consideremos la superficie de ecuación

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$$

Esta superficie es llamada un "elipsoide". Su gráfica se ve en la figura 2.23.

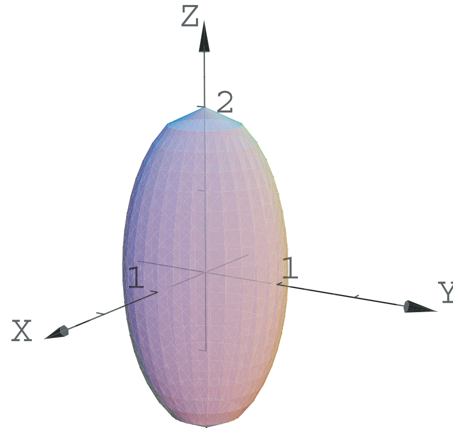


Figura 2.23 Elipsoide $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$.

Podemos obtener algunas curvas de contorno intersecando, por ejemplo, la superficie con los planos $x=k$ y $z=k$. Estas curvas las podemos dibujar como vimos en la sección anterior.

a.) $x=0$. Se obtiene la traza $y^2+\frac{z^2}{4}=1$ que corresponde a una elipse en el plano yz.

b.) $x=\pm\sqrt{1/2}$. Se obtiene $y^2+\frac{z^2}{4}=1/2$ que corresponde a dos elipses, una en el plano $x=-\sqrt{1/2}$. y la otra en el plano $x=\sqrt{1/2}$.

c.) $x=1$. Se obtiene $y^2+\frac{z^2}{4}=0$ que corresponde al punto $(1,0,0)$

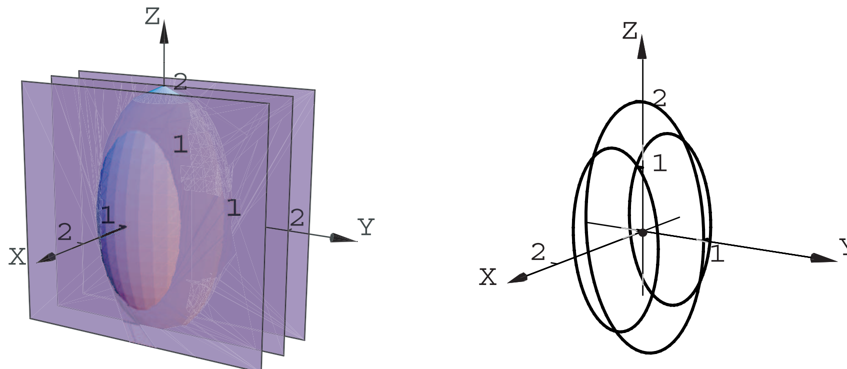


Figura 2.24 Trazas $x=0,\pm\sqrt{1/2}$

d.) $z=0$. Se obtiene la traza $x^2+y^2=1$ que corresponde a un círculo de radio 1 en el plano xy.)

e.) $z=1$. Se obtiene $x^2+y^2=0.75$ que corresponde a un círculo en el plano $z=1$.

f.) $z=-1$ Se obtiene $x^2+y^2=0.75$ que corresponde a un círculo en el plano $z=-1$.

g.) $z=\pm 2$. Se obtiene la traza $x^2+y^2=0$ que corresponde los puntos $(0,0,2)$ y $(0,0,-2)$

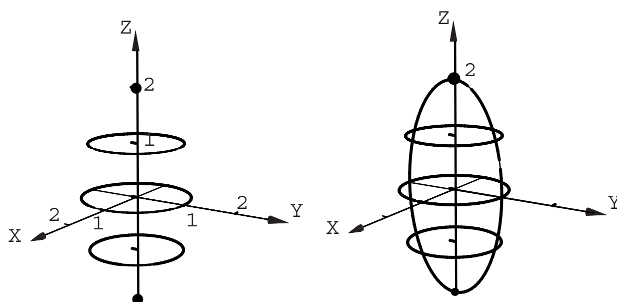


Figura 2.25 Trazas $z=1,0,-1,\pm 2$ y Trazas $z=1,0,-1,\pm 2, x=0$

■ **EJEMPLO 2.14**

Consideremos la superficie de ecuación

$$z=x^2+y^2$$

Podemos calcular algunas trazas de esta superficie para tener una idea de su gráfica (figura 2.26).

a.) Traza $z=1$. Se obtiene el círculo $x^2+y^2=1$ en el plano $z=1$

b.) Traza $z=1/2$. Se obtiene el círculo $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ en el plano $z=1/2$

c.) Traza $x=0$. Se obtiene la parábola $z=y^2$ en el plano $x=0$

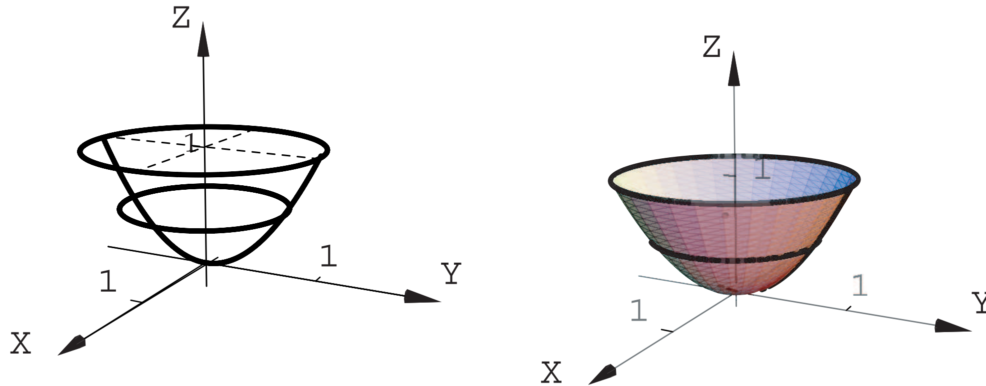


Figura 2.26 Superficie $z = x^2 + y^2$ y trazas $z = 1,\ \frac{1}{4},\ x = 0$

2.8 SUPERFICIES CUADRÁTICAS

Las secciones cónicas: elipse, parábola e hipérbola; tienen su generalización al espacio tridimensional en elipsoides, paraboloides e hiperboloides.

Definición 2.5 (Superficies cuadráticas) *La gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

se conocen como superficie cuadrática, salvo casos degenerados.

Observación: En la ecuación de segundo grado $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ deliberadamente no hemos incluido los términos mixtos xy, xz y yz, pues la presencia de estos genera superficies con rotación, tema que no trataremos en el curso.

2.8.1 Elipsoide

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

corresponde a un elipsoide. Es simétrico con respecto a cada uno de los tres planos coordenados y tiene intersección con los ejes coordenados en $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$ y $(0,0,\pm c)$. La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es un único punto o una elipse. La figura 2.27 muestra su gráfica.

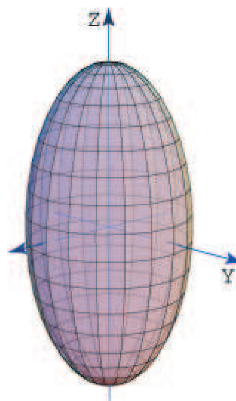


Figura 2.27 Elipsoide

2.8.2 Paraboloide elíptico.

La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

es un paraboloide elíptico. Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k}{c}$$

Sus trazas sobre planos verticales, ya sean $x=k$ o $y=k$ son parábolas. (Figura 2.28)

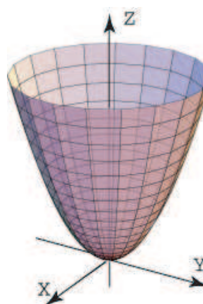


Figura 2.28 Paraboloide elíptico

2.8.3 Paraboloide hiperbólico

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

es un paraboloide hiperbólico. Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son hipérbolas o dos rectas $(z = 0)$. Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano x son parábolas que abren hacia abajo, mientras que las trazas sobre planos verticales paralelos al plano yz son parábolas que abren hacia arriba. Su gráfica tiene la forma de una silla de montar, como se observa el la figura 2.29.

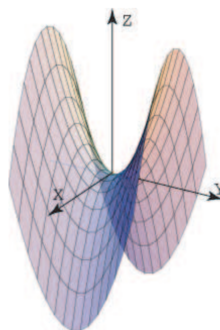


Figura 2.29 Paraboloide hiperbólico

2.8.4 Cono elíptico

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

es un cono elíptico. Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipses. Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas. Su gráfica se muestra en la figura 2.30.

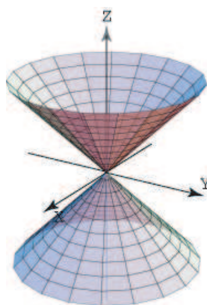


Figura 2.30 Cono elíptico

2.8.5 Hiperboloide de una hoja

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

es un hiperboloide de una hoja. Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$

Sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas o un par de rectas que se intersecan (!). Su gráfica se muestra en la figura 2.31.

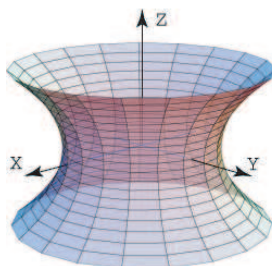


Figura 2.31 Hiperboloide de una hoja

2.8.6 Hiperboloide de dos hojas

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=1$$

es un hiperboloide de dos hojas. Su gráfica consta de dos hojas separadas. Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses y sobre planos verticales son hipérbolas (figura 2.32).

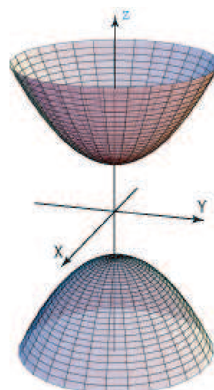


Figura 2.32 Hiperboloide de dos hojas

■ **EJEMPLO 2.15**

Identifique cada una de las siguiente superficies cuadráticas:

a.) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

b.) $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

Solución

a.) Dividiendo por 4 la primera ecuación obtenemos:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

lo cual corresponde a un hiperboloide de dos hoja con el eje y como eje de simetría.

b.) Completando el cuadrado en x para la segunda superficie obtenemos :

$$y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$$

que corresponde a un paraboloide elíptico con eje de simetría paralelo al eje y.

Traslación de Ejes.

Consideremos el elipsoide de ecuación

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$$

Este es un elipsoide con centro en $(3,3,1)$.

Para graficar esta superficie dibujamos en el sistema de ejes coordenados $x'y'z'$ donde donde $x' = x-3$, $y' = y-3$ y $z' = z-1$. Este sistema tiene su origen de coordenadas en el punto $(3,3,1)$ del sistema xyz. En este nuevo sistema graficamos la superficie.

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{9} + \frac{(z')^2}{4} = 1$$

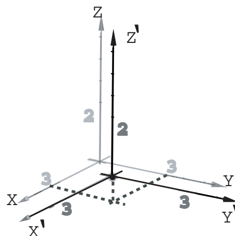


Figura 2.33 Traslación de ejes: $x' = x-3$, $y' = y-3$ y $z' = z-1$.

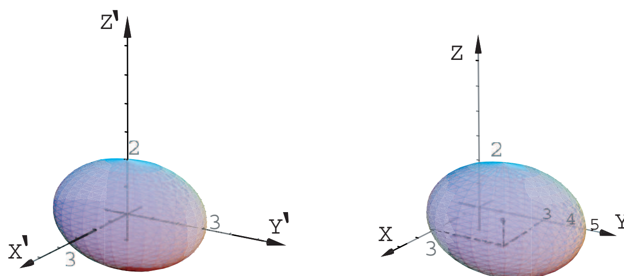
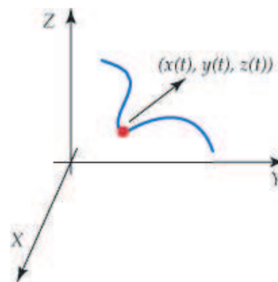


Figura 2.34 Elipsoides $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{9} + \frac{(z')^2}{4} = 1$ y $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$

2.9 PARAMETRIZACIÓN DE UNA CURVA EN EL ESPACIO.

Definición 2.6 *Si* $x(t), y(t)$ *y* $z(t)$ *son funciones continuas en un intervalo* I *entonces el conjunto de tripletas ordenadas* $C = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}$ *se denomina* curva *en el espacio tridimensional. Las funciones* $x(t), y(t)$ *y* $z(t)$ *se denominan ecuaciones paramétricas de* C *a* t *le llamamos* parámetro.



■ **EJEMPLO 2.16**

1. Segmento de recta que une A con B

$$(x, y, z) = A + t(B - A),\ t \in I = [0, 1]$$

2. Recta que pasa por $P = (p_1, p_2, p_3)$ en la dirección de $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$(x,y,z) = P + t\overrightarrow{v},\ t \in \mathbb{R}$$

3. Circunferencia, en el plano xy, de centro (h,k) y radio r

$$(x,y,z) = (h + r\cos(t),\, k + r\,\text{sen}(t),\, 0),\ t \in I = [0,\, 2\pi]$$

4. Elipse, en el plano xy, $\dfrac{(x-k)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$(x,y,z) = (h + a\cos(t),\, k + b\,\text{sen}(t),\, 0),\ t \in I = [0,\, 2\pi]$$

5. Hipérbola, en el plano xy, $\dfrac{(x-k)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$(x,y,z) = (h + a\sec(t),\, k + b\tan(t),\, 0),\ t \in I = [0,\, 2\pi]$$

6. La curva $y = f(x)$, $x \in I$ tiene ecuación paramétrica $(x, y(x))$, $x \in I$. Es decir se puede tomar x como parámetro.

2.10 INTERSECCIÓN DE SUPERFICES.

Vamos a mostrar algunos ejemplos que tienen como propósito *visualizar* cómo un plano corta a otro plano o a otra superficie. Más adelante nos dedicaremos a calcular las ecuaciones (paramétricas) de las curvas de intersección.

En los ejemplos que siguen, solamente por simplicidad, se trabaja en el primer octante. Como solo estamos tratando con cilindros lo que hacemos es extender cada superficie hasta que tenga contacto con la otra superficie. Estos puntos de intersección son la guía para bosquejar (si se dibuja a mano) la curva de intersección (o las curvas de intersección).

■ **EJEMPLO 2.17**

Dibujar las curvas de intersección, en el primer octante, de las superficies

1. $z = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ y $x + y = 6$
2. $y = x^2$ y $x + y + z = 6$
3. $z = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ y $y - x = -1$
4. $x + y + z = 6$ y $y = 5$
5. $x^2 + y^2 = 9$ y $y = x - 2$

Solución.

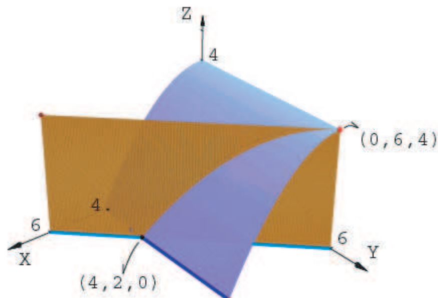


Figura 2.35 $z=4-\dfrac{x^2}{4}$ y $x+y=6$

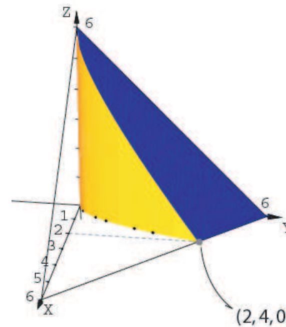
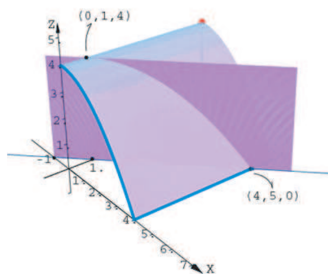


Figura 2.36 $y=x^2$ y $x+y+z=6$



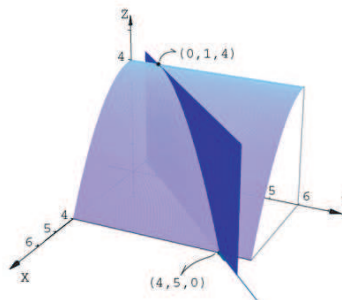


Figura 2.37 $z=4-\dfrac{x^2}{4}$ y $y-x=-1$

Figura 2.38 $x+y+z=6$ y $y=5$

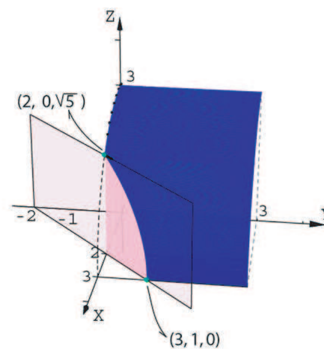


Figura 2.39 $x^2+y^2=9$ y $y=x-2$

2.11 SÓLIDOS

Un sólido es una superficie cerrada. La mayoría de las veces es la intersección de varias superficies, pero podría constar de una única superficie, por ejemplo, una esfera. Los

www.elsolucionario.net

siguientes ejemplos muestran como dibujar sólidos

■ **EJEMPLO 2.18**

Dibuje el sólido Q limitado por los planos $y+z=5$, $x=z=0$ y el cilindro $z=4-x^2$.

Solución

Primero dibujamos el cilindro $z=4-x^2$ y el plano $y+z=5$ y su respectiva intersección:

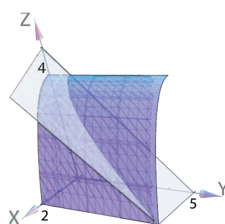


Figura 2.40

Ahora podemos "recortar" el sólido Q

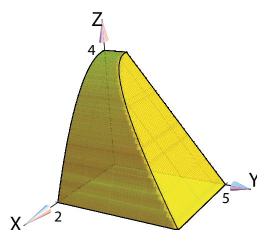


Figura 2.41

El sólido Q tiene cinco caras. Las caras de Q en los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ son

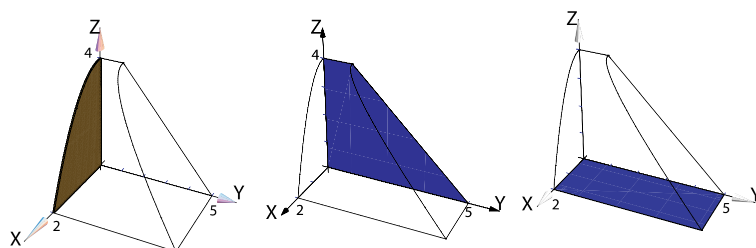


Figura 2.42

Las otras dos caras son

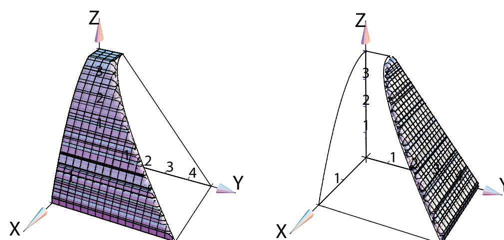


Figura 2.43

■ **EJEMPLO 2.19**

Dibuje el sólido limitado por los planos $y+z=1$, $x=z=0$ y el cilindro $y=\sqrt{x}$.

Solución

Para dibujar el cilindro $y=\sqrt{x}$ dibujamos su traza sobre el plano xy y la desplazamos a lo largo del eje z

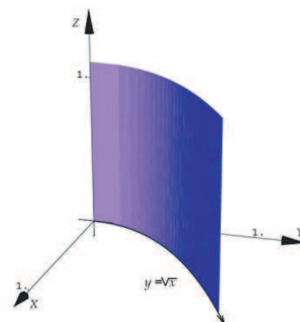
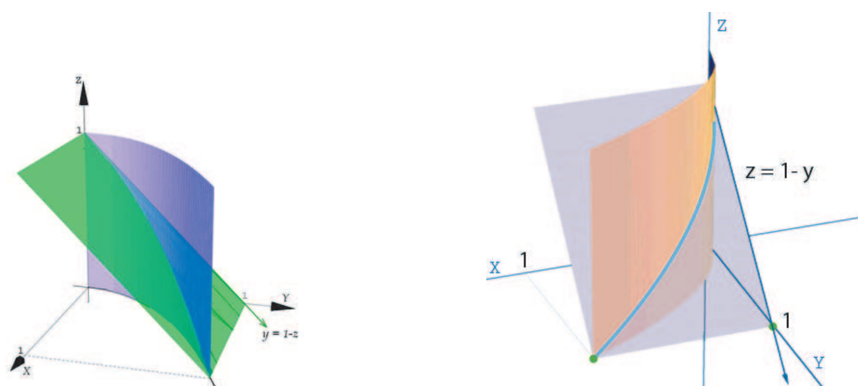


Figura 2.44 Superficie $y=\sqrt{x}$

Para dibujar el plano $y+z=1$ dibujamos su traza sobre el plano yz y la desplazamos a lo largo del eje x. Los otros planos son los planos coordenados. Aprovechamos para dibujar la intersección de las superficies.



El sólido se muestra en la figura 2.45.

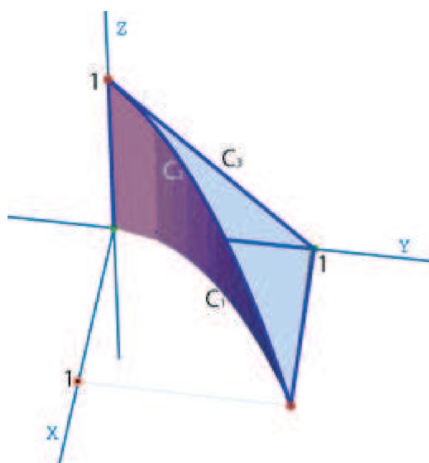


Figura 2.45 Sólido limitado por $y+z=1$, $x=z=0$ y $y=\sqrt{x}$

Para algunas aplicaciones es importante conocer las ecuaciones de las curvas que forman los bordes del sólido.

Por ejemplo, la ecuación de la curva C_1 se obtiene como el resultado de la intersección del cilindro $y=\sqrt{x}$ y el plano $z=0$, por tanto, su ecuación esta dada por :

$$z=0 \cap y=\sqrt{x} \Rightarrow C_1 = \begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{t} \quad \text{con } t\in[0,1] \\ z=0 \end{cases}$$

La curva C_2 es la intersección del cilindro $y=\sqrt{x}$ y el plano $y+z=y$ su ecuación es :

$$y=\sqrt{x}\cap y+z=1 \Rightarrow z=1-y=1-\sqrt{x} \Rightarrow C_2=\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{t} \\ z=1-\sqrt{t} \end{cases} \quad \text{con } t\in[0,1]$$

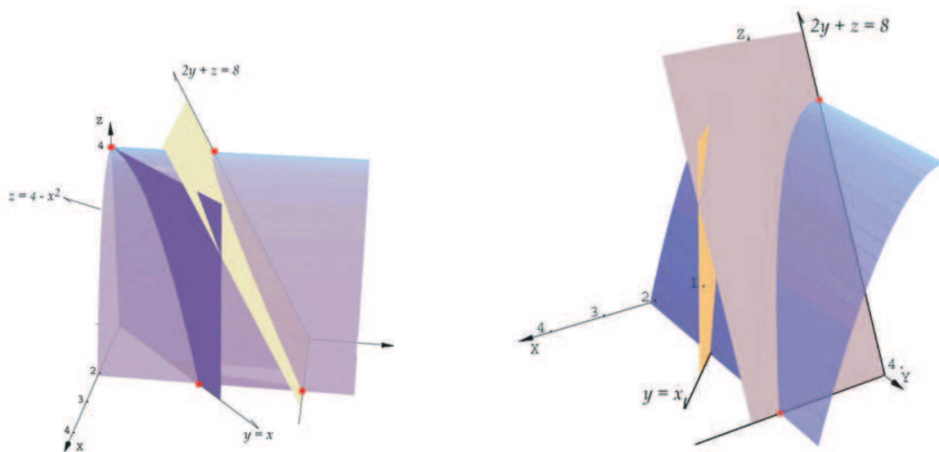
La curva C_3 es la intersección del planos $y+z=1$ y $x=0$ y su ecuación es :

$$y+z=1\cap x=0 \Rightarrow z=1-y \Rightarrow C_3=\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} \quad \text{con } t\in[0,1]$$

■ **EJEMPLO 2.20**

Dibuje el sólido limitado por los planos $2y+z=8$, $y=x$, $x=z=0$ y el cilindro $z=4-x^2$. Ver figura 2.46.

Solución



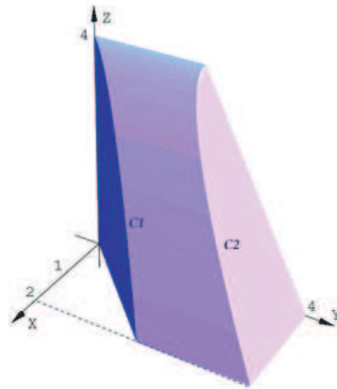


Figura 2.46 Sólido limitado por $z = x^2 + y^2 + 1, x + y = 2$ y $x = y = z = 0$

La ecuación de la curva C_1 se obtiene de la intersección del cilindro $z = 4 - x^2$ y el plano $y = x$:

$$z = 4 - x^2 \cap \ \Rightarrow \ y = x \ \Rightarrow \ C_1 = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4 - t^2 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0,2]$$

La curva C_2 se obtiene de la intersección del cilindro $z = 4 - x^2$ y el plano $2y + z = 8$:

$$\begin{aligned} z = 4 - x^2 \cap 2y + z = 8 \quad & \Rightarrow \quad z = 8 - 2y \\ & \Rightarrow \quad 4 - x^2 = 8 - 2y \\ & \Rightarrow \quad y = 2 + \frac{t^2}{2} \\ & \Rightarrow \quad C_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 2 + \dfrac{t^2}{2} \\ z = z = 4 - t^2 \end{cases} \quad \text{con } t \in [2,4] \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 2.21**

Dibuje el sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ y los planos $x + y = 2$ y $x = y = z = 0$

Solución

Observe que los planos coordenados $x = y = z = 0$ son fundamentales al momento de dibujar el sólido, pues sino podríamos obtener un sólido no adecuado. La gráfica del sólido se muestra en la figura 2.47.

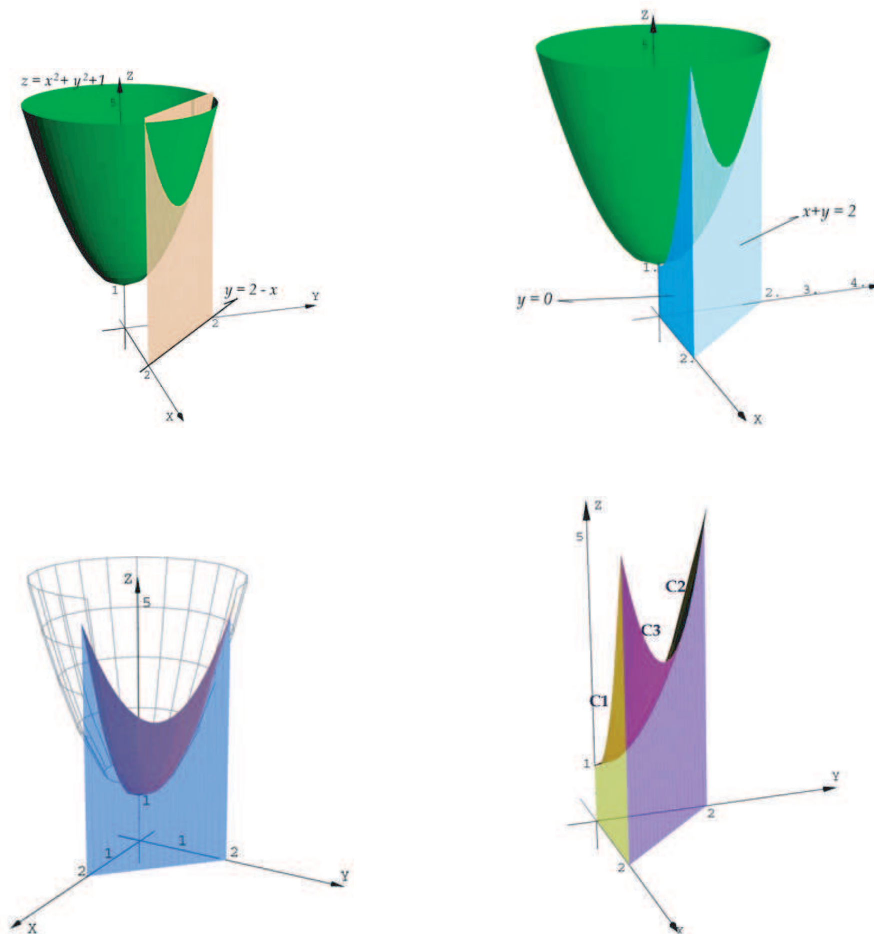


Figura 2.47 Sólido limitado por $z = x^2 + y^2 + 1$, $x + y = 2$ y $x = y = z = 0$

La curva C_1 es la intersección de paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ y el plano $x + y = 2$.

$$z = x^2 + y^2 + 1 \cap x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow z = x^2 + (2 - x)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 5$$

con lo cual su ecuación está dada por:

$$C_1 = \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 2t^2 - 4t + 5 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0,2]$$

La curva C_2 es la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ y el plano $x = 0$

$$z = x^2 + y^2 + 1 \cap x = 0 \Rightarrow z = y^2 + 1 \Rightarrow C_2 = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t^2 + 1 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0,2]$$

La ecuación de la curva C_3 se obtiene de forma análoga a la de C_2.

■ EJEMPLO 2.22

Dibuje el sólido limitado por las siguientes superficies $z = 4 - x^2$, $4y + 3z = 20$, $x - y - z = 0$, $x = y = z = 0$

Solución

Básicamente son las superficies que hemos estado dibujando. El plano $2x - y - z = 4$ pasa por el origen por lo que nos conviene dibujar las trazas sobre los planos xy y xz.

■ EJEMPLO 2.23

Dibuje el sólido limitado por las superficies: $x + z = 2$, $y + z = 4$, $z = \sqrt{x}$, $x = y = 0$

Solución

Para dibujar el plano $x + z = 2$ dibujamos su traza sobre el plano xz y la desplazamos en dirección del eje y. Para trazar el plano $y + z = 4$ dibujamos su traza sobre el plano yz y la desplazamos en dirección del eje x. Para dibujar la superficie cilíndrica $z = \sqrt{x}$ dibujamos su traza sobre el plano xz y la desplazamos a lo largo del eje y. Con lo cual obtenemos el sólido que se muestra en la figura 2.48.

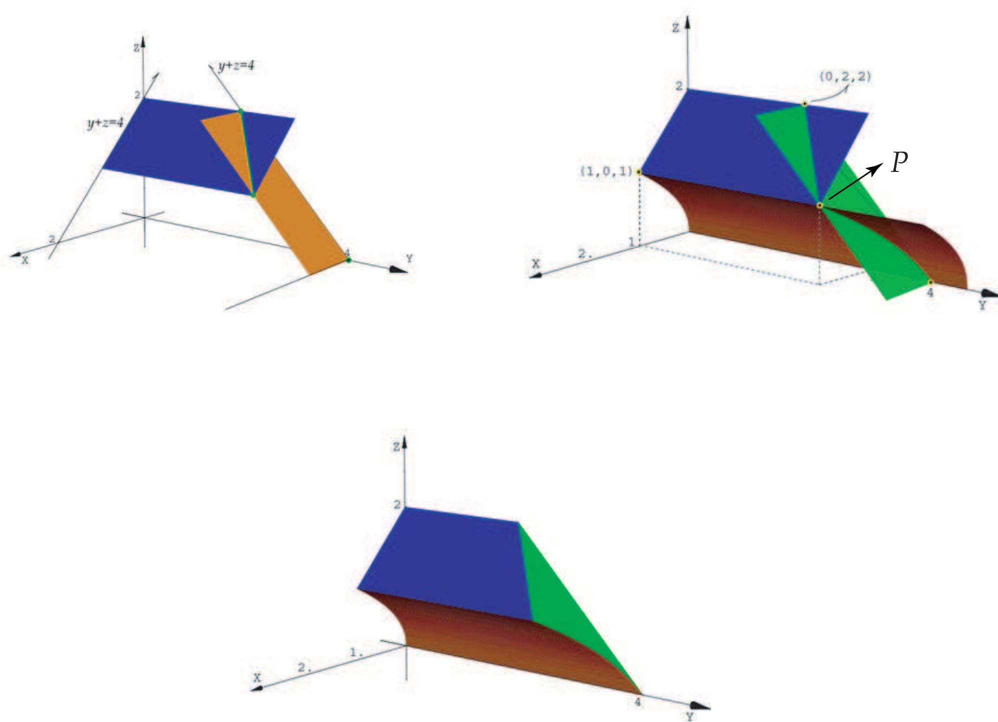


Figura 2.48 Sólido limitado por $y+z=2$, $y+z=4=0$, $z=\sqrt{x}$ y $x=y=0$

Para hallar la ecuación de la curva C_1, observe que se obtiene como resultado de la intersección de los planos $x+z=2$ y $y+z=4$.

$$x+z=2 \cap y+z=4 \Rightarrow z=2-x=4-y \Rightarrow y=2+x$$

con lo cual la ecuación de la curva es

$$C_1=\begin{cases} x=t \\ y=2+t \quad \text{con } t\in[0,1] \\ z=2-t \end{cases}$$

$$y+z=4\cap z=\sqrt{x} \Rightarrow y=4\sqrt{x} \Rightarrow C_2=\begin{cases} x=t \\ y=4-\sqrt{t} \quad \text{con } t\in[0,1] \\ z=\sqrt{t} \end{cases}$$

Para hallar las coordenadas del punto P, observe que se obtiene como la intersección de las superficies $x+z=2$, $y+z=4$ y $z=\sqrt{x}$.

Como

$$x+z=2 \wedge z=\sqrt{x} \Rightarrow x+\sqrt{x}=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow z=1$$

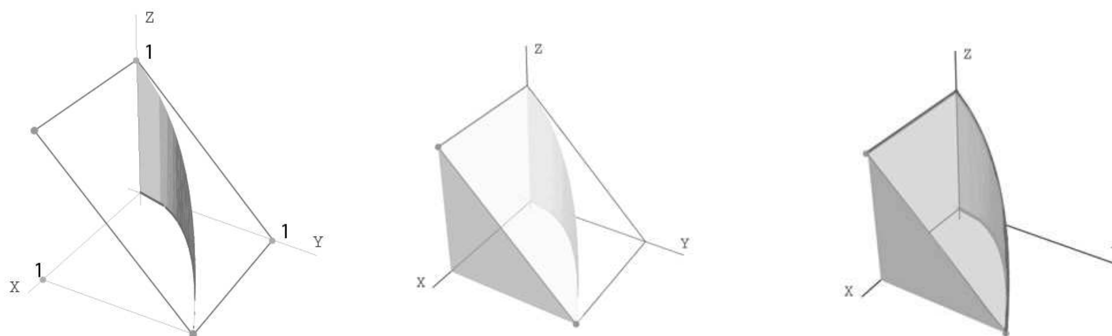
de donde

$$y+z=4 \wedge z=1 \Rightarrow y=3$$

Por tanto, $P=(1,3,1)$.

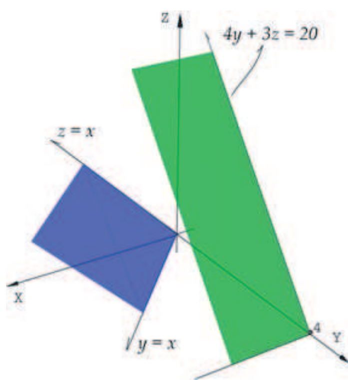
■ EJEMPLO 2.24

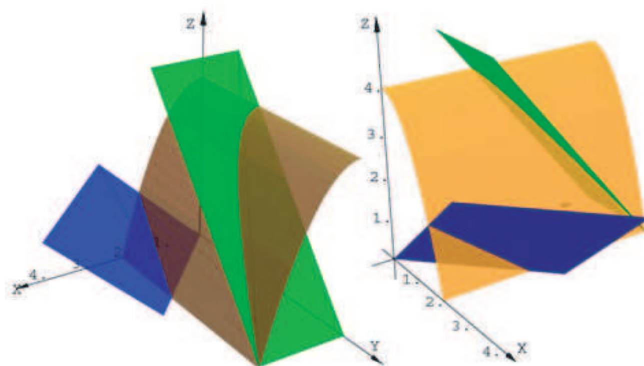
Sólido limitado por las superficies: $x=1$, $y+z=1$, $y=\sqrt{x}$, $z=y=0$.

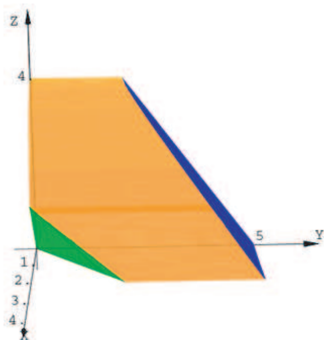


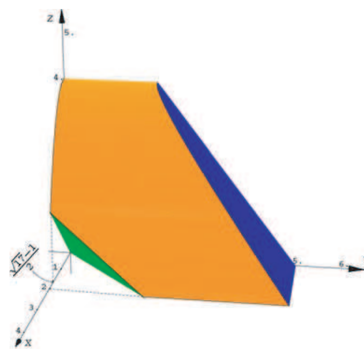
■ EJEMPLO 2.25

Sólido limitado por las siguientes superficies $z=4-x^2$, $4y+3z=20$, $x-y-z=0$ y $x=y=z=0$.



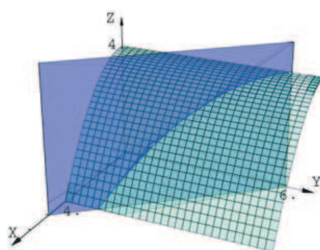


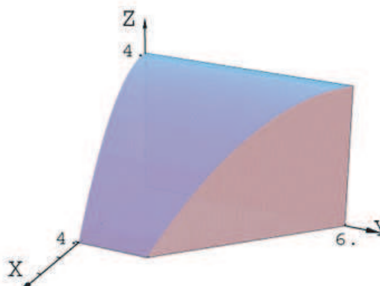




■ **EJEMPLO 2.26**

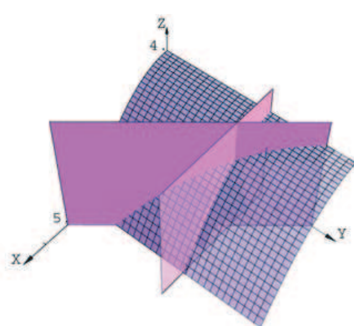
Sólido limitado por las siguientes superficies $y+x=6$, $z=4-x^2/4$ y $x=y=z=0$.

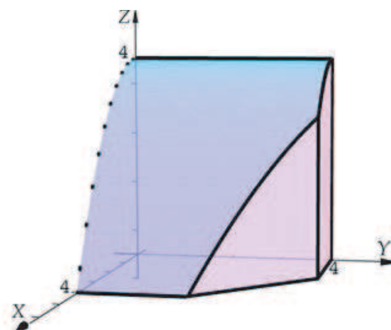




■ **EJEMPLO 2.27**

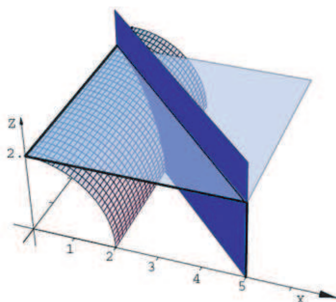
Sólido limitado por las siguientes superficies $y=4$, $y+x=6$, $z=4-x^2/4$ y $x=y=z=0$.

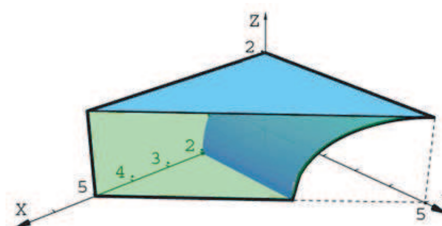




■ **EJEMPLO 2.28**

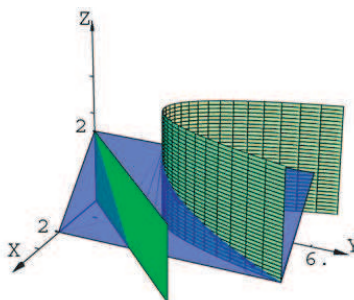
Sólido limitado por las siguientes superficies $y+x=5$, $x^2+z^2=4$, $z=2$ y $y=z=0$.

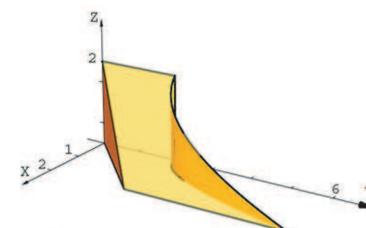




■ **EJEMPLO 2.29**

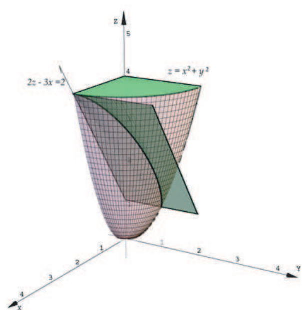
Sólido limitado por las siguientes superficies $y=x$, $y=x^2+2$, $x+z=2$ y $x=z=0$.

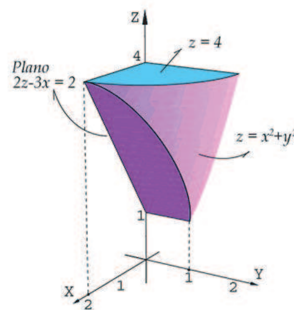




■ **EJEMPLO 2.30**

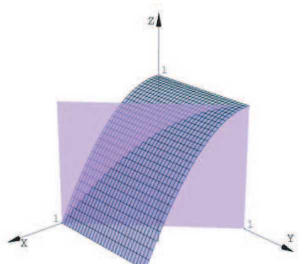
Sólido limitado por las siguientes superficies $z = x^2 + y^2$, $2z - 3x = 2$, $z = 4$ y $x = y = 0$.

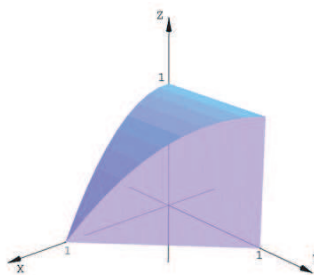




■ **EJEMPLO 2.31**

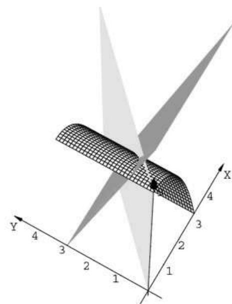
Sólido limitado por las siguientes superficies $y + x = 1$, $z = 1 - x^2$ y $x = y = z = 0$.

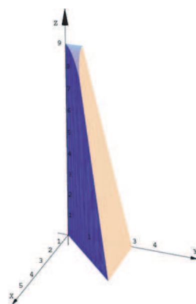




■ **EJEMPLO 2.32**

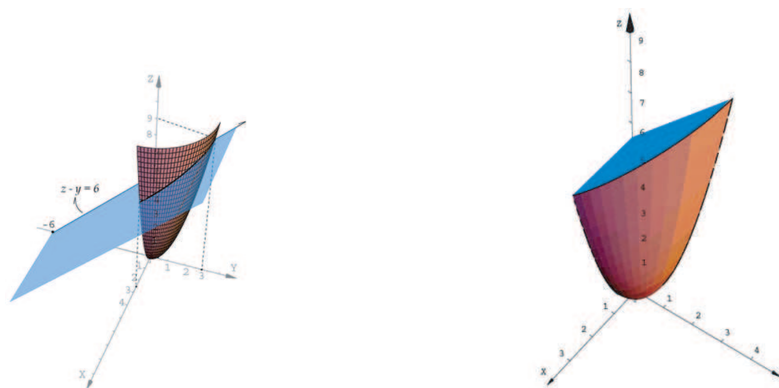
Sólido limitado por las siguientes superficies $y = x$, $z = 9 - x^2$, $4y + z = 12$ y $x = z = 0$.





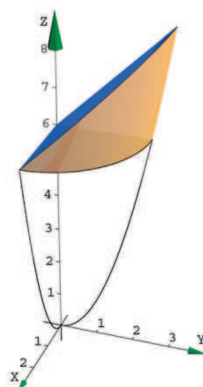
■ **EJEMPLO 2.33**

Sólido limitado por las siguientes superficies $z = x^2 + y^2$, $z - y = 6$, y $x = y = 0$.



■ **EJEMPLO 2.34**

Sólido limitado por las siguientes superficies $z = 6$, $z - y = 6$, $z = y^2 + x^2$ y $x = y = 0$.



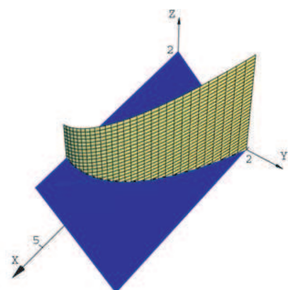
■ **EJEMPLO 2.35**

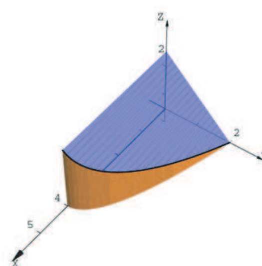
Sólido limitado por las siguientes superficies $z + y = 6$, $y = 4 - x^2$ y $x = y = z = 0$.



■ EJEMPLO 2.36

Sólido limitado por las siguientes superficies $x = 4 - y^2,\ z + y = 2,$ y $x = y = z = 0.$





Las páginas web con animación 3D se encuentran en

`http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/SUPERIOR/index.htm`

Los ejercicios de Sólidos (con animación 3D) están en

`http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/SUPERIOR/t2-Funciones-de-variasvariables/7-solidos/Ejercicios-solidos/index3.html`

Capítulo 3

DERIVADAS PARCIALES

3.1 DERIVADA PARCIAL.

La derivada de una función de una variable mide la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente. Para funciones de dos variables x e y podemos medir dos razones de cambio: una según cambia y, dejando a x fija y otra según cambia x, dejando a y fija.

Suponga que dejamos variar sólo a x, dejando a y fija, digamos $y = b$, en donde b es una constante. Entonces, en verdad estamos en presencia de una función de una sola variable x, a saber $g(x) = f(x,b)$. Si g tiene una derivada en a entonces la llamamos la derivada parcial de f con respecto a x en (a,b). De forma análoga podemos hacerlo para y variable y x fija.

Definición 3.1 (Derivada parcial) *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables y sea $(a,b) \in D$, entonces la derivada parcial de f con respecto a x en (a,b) está dada por*

$$f_x(a,b) = g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,\, b) - f(a,b)}{h} \quad (1)$$

siempre y cuando el límite exista.

De forma similar definimos la derivada parcial de f con respecto a y en (a,b) por

$$f_y(a,b) = g'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \quad (2)$$

Observación: Los límites (1) y (2) son en una variable por lo que podemos calcularlos usando las técnicas aprendidas en cursos anteriores: factorización, racionalización, regla de L Hôpital, etc.

■ **EJEMPLO 3.1**

Usando la definición de derivada parcial calcule $f_y(1,2)$ para $f(x,y) = 2xy^2 + x$.

Solución

Usando la definición tenemos que:

$$\begin{aligned} f_y(1,2) = g'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h) - f(1,2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^2 - 8}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(4+h)}{1} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Observación: existen varias notaciones para la derivada parcial:

$$f_x(x,y) = D_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$f_y(x,y) = D_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

■ **EJEMPLO 3.2**

Imaginemos que una placa metálica de forma rectangular y delgada se calienta irregularmente, de forma tal que la temperatura en el punto (x,y) es $T(x,y) = 2xy^2 + x$. Además, suponga que x e y están medidas en metros y la temperatura T en grados centígrados. Cómo varía la temperatura T en el punto $(1,2)$ cuando x permanece fijo en $x = 1$?, Qué

significa esto ?

Solución

Del ejemplo 1 tenemos que $f(1,2) = 8$ con lo cual la rapidez de cambio de la temperatura T en el punto $(1,2)$ es de 8 grados centígrados por metro, cuando x esta fijo en 1. El hecho de que sea positiva nos indica que la temperatura T de la placa aumenta a medida que avanzamos sobre la recta $x = 1$ hacia $y = 2$.

Puesto que la derivada parcial no es más que la derivada ordinaria de la función g de una variable que obtenemos al fijar alguna de las variables x o y, su cálculo se realiza de la misma manera y usando las mismas reglas que las usadas para las funciones de una variable.

Para calcular f_x, considere a y como una constante y derive a $f(x,y)$ con respecto a x.

Para calcular f_y, considere a x como una constante y derive a $f(x,y)$ con respecto a y.

■ EJEMPLO 3.3

Calcule la derivada parcial f_y para $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ y también calcule $f_y(2,1)$

Solución

Usando la regla para la derivada del cociente

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{y(x^2 - y^2) - xy(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} \\
&= \frac{x^3 - xy^2 + 2xy^2}{(x^2 - y^2)^2}
\end{aligned}
$$

con lo cual $f_y(2,1) = \dfrac{10}{9}$.

■ EJEMPLO 3.4

Calcule z_x y z_y, si z está definida implícitamente como una función de x e y, mediante la siguiente ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 2$$

Solución

Usando la regla de la cadena en una variable, obtenemos, derivando respecto a x, que:

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+6yz+6xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Y al despejar $\frac{\partial z}{\partial x}$, obtenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2+2yz}{z^2+2xy}$$

De una forma análoga, la derivación implícita con respecto a y, nos da

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2+2xz}{z^2+2xy}$$

■ **EJEMPLO 3.5**

Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ para la función $f(x,y)=\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2x^2}$

Solución

Para calcular f_y debemos aplicar repetidamente la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\sqrt{x^2+y^2x^2}\,\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2x^2}}$$

El siguiente ejemplo muestra que algunas veces no queda más que recurrir a la definición para calcular una derivada parcial.

■ **EJEMPLO 3.6**

Si $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$, calcule $f_x(0,0)$.

Solución.

Observe que si calculamos la derivada parcial usando las reglas de derivación usuales obtenemos que

$$f_x(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

y al evaluarla obtenemos una forma indeterminada "$\frac{0}{0}$"; esto nos puede llevar a la conclusión errónea de que la derivada parcial no existe.

Ahora usemos la definición

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada parcial $f_x(0,0)$ existe y es 1.

Observación: de igual manera podemos comprobar que $f_y(0,0) = 1$

■ **EJEMPLO 3.7**

La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. f tiene un "hueco" en $x=1$. Podemos agregar un punto definiendo f en $x=1$ como $f(1)=2$. Esto la hace no solo continua en $x=1$ sino también derivable. La derivada se debe calcular con la definición y se obtiene $f'(1)=1$.

Lo mismo podemos hacer por $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Esta función no esta definida en $(0,0)$. En este punto la gráfica tiene un "hueco".

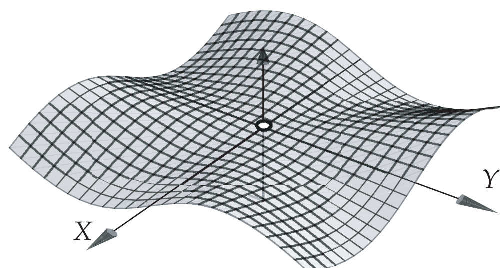


Figura 3.1

Pero podemos agregar el punto que falta definiendo $f(0,0) = 0$. Con esto f no solo queda continua sino que además las derivadas parciales existen en $(0,0)$. En efecto

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

de igual manera $f_y(0,0) = 0$.

3.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL

Recordemos que la gráfica de $z = f(x,y)$ representa una superficie S. Si $f(a,b) = c$, entonces el punto $P = (a,b,c)$ esta sobre la superficie S. El plano vertical $y = b$ interseca a la superficie S en la curva C_1 (es decir, C_1 es la traza de la superficie S sobre el plano $y = b$. De manera semejante, el plano vertical $x = a$ interseca a la superficie S en la curva C_2. Ambas curvas pasan por el punto P.

Observe que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x,b)$ de manera que la pendiente de su recta tangente T_1 en el punto P es $g'(a) = f_x(a,b)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $g(y) = f(a,y)$, así que la pendiente de su tangente T_2 en el punto P es $g'(b) = f_y(a,b)$.

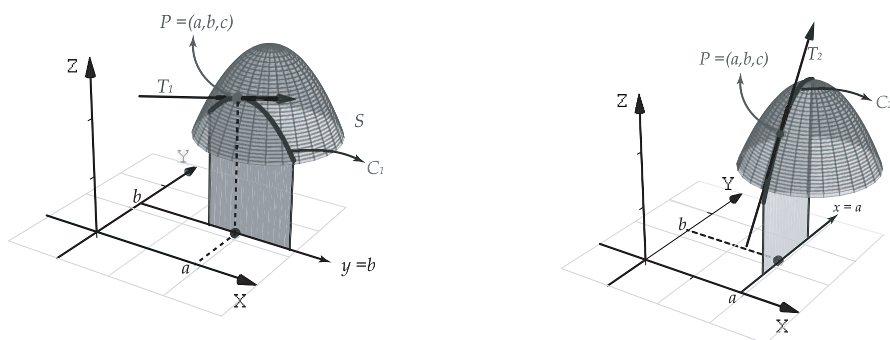


Figura 3.2 Derivada parcial respecto a x y derivada parcial respecto a y

Por consiguiente, las derivadas parciales $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ pueden interpretarse geométricamente como las pendientes de las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P , respectivamente.

Las derivadas parciales pueden también interpretarse como razones de cambio. Si $z = f(x,y)$, entonces f_x representa la razón de cambio de $z$con respecto a x, cuando y permanece fija. De manera semejante, f_y representa la razón de cambio de z con respecto a y, cuando x permanece fija.

■ **EJEMPLO 3.8**

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva que se obtiene de la intersección del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $y = 1$, cuando $x = \dfrac{1}{2}$.

Solución

En este caso la pendiente de la recta tangente esta dada por

$$f_x = -2x \implies m = f_x\left(\frac{1}{2},1\right) = -1$$

con lo cual la ecuación de la recta tangente es : $z = -x + b$; $y = 1$, pero como pasa por el punto $P = \left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{11}{4}\right)$ se tiene que

$$z = -x + b \implies \frac{11}{4} = \frac{-1}{2} + b \implies b = \frac{13}{4}$$

En la figura 3.3 se muestra la proyección sobre el plano xz de la recta tangente $z = -x + \dfrac{13}{4}$, $y = 1$ y la parábola $z = 4 - x^2 - y^2$, $y = 1$.

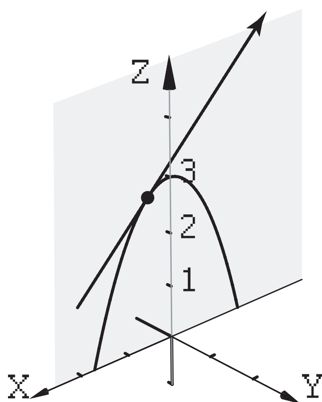


Figura 3.3 Proyección, sobre xz, de la parábola y la recta tangente

De donde obtenemos que las ecuaciones paramétricas de la recta tangente están dadas por:

$$C = \begin{cases} x &= t \\ y &= 1 \\ z &= -t + \dfrac{13}{4} \end{cases}$$

La gráfica del paraboloide, la parábola y la recta tangente se muestran en la figura 3.4.

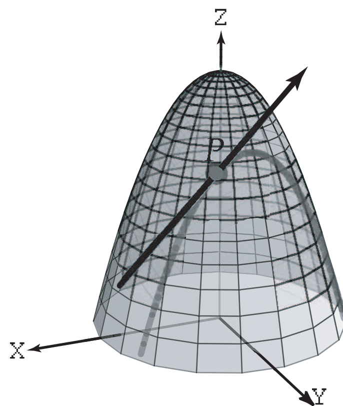


Figura 3.4 Gráfica de: paraboloide, parábola y recta tangente

■ **EJEMPLO 3.9**

El plano $y = 2$ interseca al elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ formando una elipse. Determine las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la elipse en el punto $(1,2,2)$.

Solución

La ecuación $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ define a z implícitamente como una función de x e y, entonces :

$$8x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x}{z}$$

Con lo cual la pendiente de la recta tangente esta dada por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4}{2} = -2 \implies m = -2$$

Pero como la recta tangente pasa por el punto $P = (1,2,2)$, entonces

$$z = -2x + b \implies 2 = -2 + b \implies b = 4$$

De donde su ecuación es : $z = -2x + 4$; $y = 2$ y sus ecuaciones paramétricas son

$$C = \begin{cases} x &= t \\ y &= 2 \\ z &= 4 - 2t \end{cases}$$

Observación : existe otra forma de calcular la ecuación de la recta tangente a la curva que resulta de intersecar dos superficies en un punto P la cual involucra el uso del vector gradiente como vemos más adelante.

3.3 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Si f es una función de dos variables x e y, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, las cuales cuales se llaman segundas derivadas parciales de f. Si $z = f(x,y)$, utilizamos la siguiente notación :

- $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

- $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
- $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

La notación f_{xy} o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ significa que primero derivamos con respecto a x y luego con respecto a y, mientras que para calcular f_{yx} el orden se invierte.

■ EJEMPLO 3.10

Calcule las segundas derivadas parciales de $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$

Solución

Las primeras derivadas parciales están dadas por :

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^2$

$f_y(x,y) = 2x^2y + 3y^2$

De donde obtenemos que :

$f_{xx}(x,y) = 6x + 2y^2$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial(3x^2 + 2xy^2)}{\partial y} = 4xy$

$f_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial(2x^2y + 3y^2)}{\partial x} = 4xy$

$f_{yy}(x,y) = 6y + 2x^2$

Observación : note que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} en el ejemplo anterior son iguales. Esto no es una casualidad y en la mayoría de los casos prácticos se da. El siguiente teorema, descubierto por el matemático francés Alexis Clairaut (1713 -1765), da las condiciones bajo las cuales podemos afirmar que esta igualdad se da.

Teorema 3.1 (Igualdad de las derivadas mixtas) *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar donde D es un disco abierto con centro en (a,b) y radio δ, entonces si las funciones*

f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

Observación : De manera análoga podemos definir las derivadas parciales de orden 3 o superior.

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial\, y^2 \partial x}$$

y al usar el teorema de Clairaut, se puede demostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$, siempre y cuando estas funciones sean continuas.

■ **EJEMPLO 3.11**

Volvamos a nuestra función $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$. Ya habíamos visto que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. ¿Será $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$?. La respuesta es no. En efecto, aunque f_{xy} y f_{yx} están definidas en $(0,0)$, no son continuas en este punto. Para ver esto, podemos calcular estas derivadas de dos maneras distintas y observar que el valor difiere. Primero derivamos sobre la recta $x = 0$ y luego sobre la recta $y = 0$.

$$z_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy(h^2-y^2)}{h(h^2+y^2)} = -y$$

$$z_x(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hx(h^2-y^2)}{h(h^2+y^2)} = x$$

Ahora

$$z_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$z_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

Esto muestra que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. El gráfico de $f_{xy}(x,y)$ muestra un salto en $(0,0)$

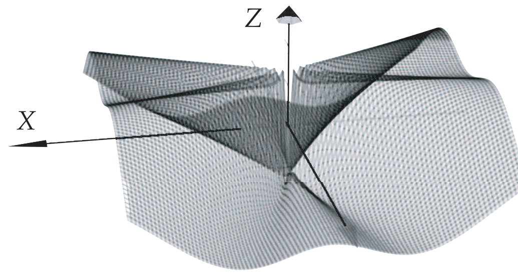


Figura 3.5

■ **EJEMPLO 3.12**

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se usan para expresar leyes físicas. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

se conoce como ecuación de Laplace, en honor a Pierre Laplace (1749 - 1827). Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas y desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones relacionadas con conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico. Compruebe que la función $u(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de Laplace.

Solución

Las primeras derivadas parciales están dadas por

$$u_x = e^y \cos x$$

$$u_y = e^y \operatorname{sen} x$$

con lo cual

$$u_{xx} = -e^y \operatorname{sen} x$$

$$u_{yy} = e^y \operatorname{sen} x$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x = 0$$

■ **EJEMPLO 3.13**

La ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde a es una constante, describe el movimiento de una onda, que puede ser una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante.

Si f y g son funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ satisface la ecuación de onda.

Solución

Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a x están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x+at) + g'(x+at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+at) + g''(x+at)$$

Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a t están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = af'(x+at) + ag'(x+at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x+at)$$

Sustituyendo obtenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x+at) = a^2(f''(x+at) + g''(x+at)) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

■ **EJEMPLO 3.14**

Si f y g son funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función

$$u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$$

satisface la ecuación diferencial parcial $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

Solución

Las derivadas de $u(x,y)$ con respecto a x están dadas por :

$u_x = f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)$

$u_{xx} = f'(x+y) + f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) = 2f'(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)$

$u_{xy} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$

$u_y = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y)$

$u_{yy} = xf''(x+y) + g'(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y) = 2f''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= 2\,f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) - 2f'(x+y) - 2xf''(x+y) - 2g'(x+y) \\ &\quad -2yg''(x+y) + xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■ EJEMPLO 3.15

Si se dijera que existe una función $f(x,y)$ cuyas derivadas parciales son $f_x(x,y) = x+4$ y $f_y(x,y) = 3x - y$; usted lo creería?

Solución

Puesto que $f_{xy}(x,y) = 1$ y $f_{yx}(x,y) = -1$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por el teorema de Clairaut debieran ser iguales, por lo tanto no existe tal función.

■ EJEMPLO 3.16

Una barra de metal de un metro de largo se calienta de manera irregular y de forma tal que a x metros de su extremo izquierdo y en el instante t minutos, su temperatura en grados centígrados esta dada por

$$H(x,t) = 100\,e^{-0.1t}\,\text{sen}\,\pi x \text{ con } 0 \leq x \leq 1$$

1. Trace la gráfica de $H(x,t)$ para $t = 0$ y $t = 10$.

2. Calcule $H_x(0.2,t)$ y $H_x(0.8,t)$. Cuál es la interpretación práctica (en términos de temperatura) de estas derivadas parciales?. Explique por qué cada una tiene el signo

que tiene.

3. Calcule $H_x(x,t)$ Cuál es su signo?. Cuál es su interpretación en términos de temperatura?

Solución

1. La gráfica de las funciones $H(x,0)$ y $H(x,10)$ se muestran en la figura 3.3.

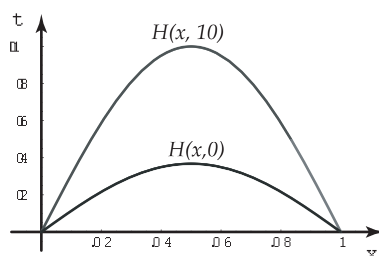


Figura 3.6 $H(x,0)$ y $H(x,10)$

Observe que la figura 3.6 nos indica la temperatura inicial en cada punto de la barra y la temperatura después de un minuto. Note que el punto más caliente de la barra en cualquier instante está a 0.5 metros del extremo izquierdo.

2. La derivada parcial respecto a x esta dada por $H_x(x,t) = 100\pi e^{-0.1t} \cos \pi x$ y al evaluar obtenemos que

$$H_x(0.2,t) = 100\pi e^{-0.1t} \cos 0.2\pi \approx 254.16\, e^{-0.1t}$$

como esta derivada parcial es decreciente conforme t crece y positiva para cualquier valor de t, concluimos que la temperatura va disminuyendo, pues las pendientes de las rectas tangentes a $H(0.2,t)$ son positivas y van siendo más pequeñas conforme t aumenta, esto cuando estamos a 0.2 metros del extremo izquierdo. El signo positivo de la derivada nos indica que cuando vamos en la dirección del eje x positivo (hacia el extremo derecho de la barra) la temperatura aumenta.

Por otro lado,

$$H_x(0.8,t) = 100\pi e^{-0.1t} \cos 0.8\pi \approx -254.16 e^{-0.1t}$$

observe que en este caso, como la derivada parcial es creciente conforme t crece y negativa para cualquier valor de t, concluimos que la temperatura va disminuyendo,

pues las pendientes de las rectas tangentes a $H(0.2,t)$ son negativas y van siendo más grandes conforme t aumenta, esto cuando estamos a 0.8 metros del extremo izquierdo. El signo negativo de la derivada nos indica que cuando vamos en la dirección del eje x positivo (hacia el extremo derecho de la barra) la temperatura disminuye.

Las siguientes tablas de valores y la gráfica 3.6 nos permiten observar con claridad lo explicado antes.

t	$H_x(0.2,t)$	$H(0.2,t)$
0	254.16	58.7785
10	93.5003	21.6234
20	34.3968	7.95641
30	12.6539	2.92641
40	4.65511	1.07657
50	1.71252	0.39605

t	$H_x(0.8,t)$	$H(0.8,t)$
0	-254.16	58.7785
10	-93.5003	21.6234
20	-34.3968	7.95641
30	-12.6539	2.92641
40	-4.65511	1.07657
50	-1.71252	0.39605

3. La derivada parcial respecto a x está dada por $H_x(x,t) = 100\pi e^{-0.1t}\cos\pi x$

   Observe que $H_x(x,t) \geq 0$ para $0 \leq x \leq 0.5$ y cualquier valor de t y $H_x(x,t) \leq 0$ para $0.5 \leq x \leq 1$ y cualquier valor de t, lo cual nos permite concluir que la temperatura va aumentando desde cero hasta llegar a la mitad de la barra y luego va disminuyendo hasta cero, es decir, que la parte más caliente de la barra es la mitad.

EJEMPLO 3.17

Las ecuaciones

$$\begin{cases} x = v\ln(u) & (1) \\ y = u\ln(v) & (2) \end{cases}$$

definen a u y v como funciones de las variables independiente x e y. Exprese v_x en términos de u y v.

Solución

Para calcular v_x derivemos las ecuaciones (1) respecto a x

$$1 = v_x\ln(u) + \frac{v}{u}u_x$$

$$0 = u_x\ln(v) + \frac{u}{v}v_x$$

Ahora usemos la regla de Cramer para hallar v_x

$$w = \begin{vmatrix} \frac{v}{u} & \ln(u) \\ \ln v & \frac{u}{v} \end{vmatrix} = 1 - \ln(u)\ln(v)$$

$$w1 = \begin{vmatrix} 1 & \ln(u) \\ 0 & \frac{u}{v} \end{vmatrix} = \frac{u}{v}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} \frac{v}{u} & 1) \\ \ln v & 0 \end{vmatrix} = -\ln(v)$$

De donde

$$u_x = \frac{w_1}{w} = \frac{\frac{u}{v}}{1 - \ln(u)\ln(v)} = \frac{u}{v - v\ln(u)\ln(v)}$$

$$v_x = \frac{w_2}{w} = \frac{-\ln(v)}{1 - \ln(u)\ln(v)} = \frac{\ln(v)}{\ln(u)\ln(v) - 1}$$

Volveremos a esto un poco más adelante.

■ **EJEMPLO 3.18**

Compruebe que la función $u(x,y) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ satisface la ecuación diferencial de Laplace en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Solución

Calculemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

y al sumarlas obtenemos el resultado deseado.

3.4 INCREMENTOS Y DIFERENCIALES. DIFERENCIAL TOTAL.

3.4.1 Introducción.

Una función f de una variable es *derivable* en x si se puede aproximar linealmente en un vecindario alrededor de este punto (con la recta tangente). Formalmente, si f se puede representar en la forma

$$f(x+h)-f(x) = hA+,\varepsilon h \tag{3.1}$$

donde $\varepsilon \to 0$ si $h \to 0$.

Como es conocido, la ecuación (3.1) se cumple cuando $f'(x)$ existe. De hecho $A = f'(x)$.

En dos variables la idea es parecida, $z = f(x,y)$ es *diferenciable* (o *derivable*) en (x,y) si puede ser aproximada, en un vecindario de este punto, por una función lineal. Formalmente, f es diferenciable si puede ser representada en la forma

$$f(x+h,y+k)-f(x,y) = Ah+Bk+\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k \tag{3.2}$$

donde, A,B son independientes de h,k y $\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0$ si $h,k \to 0$.

Si la representación (3.2) es posible, $A = f_x$ y $B = f_y$.

$A = f_x$ se obtiene poniendo $k = 0$ y dividiendo por h y haciendo $h \to 0$.

$B = f_y$ se obtiene poniendo $h = 0$ y dividiendo por k y haciendo $k \to 0$.

En una variable se define el diferencial $df = f'(x)\,dx$. De manera similar, si f es diferenciable[1], se define la *diferencial total* $df = f_x\,dx + f_y\,dy$.

Un teorema importante establece condiciones suficientes de diferenciabilidad: si f_x, f_y existen en (x,y) y si al menos una de estas derivadas es continua en este punto, entonces f es diferenciable en (x,y).

3.4.2 Incrementos y Diferenciales.

Para funciones de una variable $y = f(x)$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

y la diferencial de y como

$$dy = f'(x)dx$$

Δy representa el cambio en la altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa la variación en y a lo largo de la recta tangente cuando x varía en una cantidad $dx = \Delta x$.

Observe que $\Delta y - dy$ se aproxima a cero más rápidamente que Δx, ya que

$$\varepsilon = \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

y al hacer $\Delta x \longrightarrow 0$, tenemos que $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Por tanto

$$\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x$$

donde

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ conforme } \Delta x \longrightarrow 0.$$

En la siguiente 3.7 se muestra df y Δf.

[1] En algunos textos solo se pide que las derivadas parciales existan en (x,y)

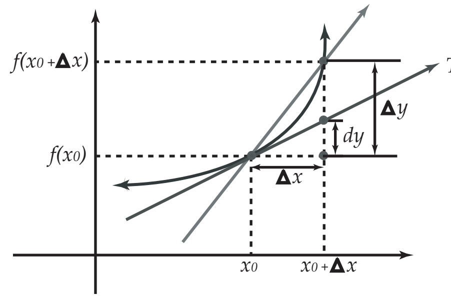


Figura 3.7 df y Δf

Ahora consideremos una función de dos variables $z = f(x,y)$.

Si x y y son incrementados Δx y Δy, entonces el correspondiente incremento de z es

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Con lo cual Δz representa el cambio en el valor de f cuando (x,y) cambia a $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$.

Teorema 3.2 (Aproximación lineal) *Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continua en D. Suponga que Δx y Δy son incrementos de x y de y, lo suficientemente pequeños para que $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, entonces si las derivadas parciales f_x y f_y son continuas en (x_0,y_0) el incremento de la variable dependiente z*

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

puede escribirse como

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde

$$\varepsilon_1 \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad \Delta x \longrightarrow 0$$
$$\varepsilon_2 \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad \Delta y \longrightarrow 0$$

Los incrementos Δx y Δy se les llama diferenciales de las variables independientes y se denotan por dx y dy.

Observación: Este teorema afirma que el cambio real en z es aproximadamente igual a la diferencial total dz, cuando los incrementos Δx y Δy son pequeños, es decir, $\Delta z \cong dz$.

■ **EJEMPLO 3.19**

El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden $10cm$ y $25cm$, respectivamente, con un posible error en la medición de $0.1cm$, cuando mucho. Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el volumen del cono.

Solución

El volumen de un cono es $V = \pi r^2 h$, con lo cual la diferencial total es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi rh}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Puesto que los errores son, cuando mucho, del orden de $0.1cm$, tenemos que $|\Delta x| \leq 0.1$ y $|\Delta y| \leq 0.1$. Para estimar el máximo error en el volumen, tomanos el máximo error en las medidas de r y h. Por tanto, $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$, junto con $r = 10, h = 25$

$$dV = \frac{500}{3} 0.1 + \frac{100\pi}{3} 0.1 = 20\pi$$

De esta forma el máximo error en el volumen es de aproximadamente $20\pi cm \cong 63cm$.

3.4.3 Funciones Diferenciables.

Para que una función f de varias variables sea diferenciable en un punto (a,b) no basta con que las derivadas parciales existan, esto nos dice que la diferenciabilidad de una función de varias variables es más compleja que la de una variable.

Definición 3.2 (Diferenciabilidad) *Dada una función escalar $f : D \subset R^2 \longrightarrow R$ continua en D con derivadas parciales f_x y f_y continuas en $(x_0, y_0) \in D$, si Δz puede expresarse como*

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde

$$\varepsilon_1 \longrightarrow 0 \;\; cuando \;\; \Delta x \longrightarrow 0$$

$$\varepsilon_2 \longrightarrow 0 \;\; cuando \;\; \Delta y \longrightarrow 0$$

decimos que f *es* derivable *(o* diferenciable*) en* (x_0, y_0).

Definición 3.3 (La Diferencial Total) *Sean* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable y* Δx *y* Δy *incrementos de* x *y* y, *entonces la* diferencial total *de la variable dependiente* z *es*

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

■ **EJEMPLO 3.20**

Calcule la diferencial total para la función

$$f(x,y) = \sqrt{2x^3 + y^2}$$

Solución.

Las derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{2x^3 + y^2}}$$

de donde

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta y = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{2x^3 + y^2}}\Delta y$$

Observación: Es decir, que una función f es diferenciable en (x_0, y_0) si la *diferencial total* dz es una buena aproximación al incremento total Δz. En otras palabras, la función lineal

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

es una buena aproximación de la función f cerca de (x_0, y_0). Por consiguiente, por el teorema de aproximación lineal, si f_x y f_y existen cerca de (x_0, y_0) y son continuas en este punto, entonces f es derivable en este punto. Más generalmente

Teorema 3.3 *si f_x, f_y existen en (x,y) y si al menos una de estas derivadas es continua en este punto, entonces f es diferenciable en (x,y).*

■ **EJEMPLO 3.21**

Use diferenciales para calcular un valor aproximado para

$$\sqrt{3(1.95)^3 + (5.1)^2}$$

Solución.

Consideremos la función $f(x,y) = \sqrt{3(x)^3 + (y)^2}$ y observe que podemos calcular con facilidad $f(2,5) = 7$. Por lo tanto, tomando $x_0 = 2$ y $y_0 = 5$, $dx = \Delta x = -0.05$ y $dy = \Delta y = 0.1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{3(1.95)^3 + (5.1)^2} &= f(1.95, 5) \\
&= f(2.5) + df \\
&= 7 + f_x(2.5)dx + f_y(2.5)dy \\
&= 7 + \frac{12}{7}(-0.05) + \frac{5}{7}(0.1) \\
&= 6.98571
\end{aligned}$$

La diferencial de f fue calculada en el ejemplo 3.20.

Al igual que para funciones de una variable, la derivabilidad implica continuidad, como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.4 (Diferenciabilidad y continuidad) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar derivable en $(a,b) \in D$, entonces f es continua en (a,b).*

3.5 REGLA DE LA CADENA. DERIVACIÓN IMPLÍCITA.

3.5.1 Regla de la Cadena

Recordemos que en una variable, si $f(u)$ y $u(x)$ son derivables, entonces la regla de la cadena establece

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

De manera algo parecida podemos considerar el caso de una función $z = f(x,y)$ en la que los argumentos x e y son funciones de t o funciones de t y u.

Consideremos primero el caso $z = f(x,y)$ (con derivadas parciales continuas f_x y f_y) donde $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son funciones derivables.

Para calcular $\dfrac{dz}{dt}$, recordemos que

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

como Δt provoca incrementos Δx y Δy y como

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \longrightarrow 0$ si $\Delta x, \Delta y \longrightarrow 0$, entonces

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

y entonces

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x,y)\frac{dx}{dt} + f_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$

En general,

Teorema 3.5 (Regla de la Cadena) *Sea $z = f(x,y)$ (con derivadas parciales continuas f_x y f_y) donde $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son funciones derivables. Entonces*

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x,y)\frac{dx}{dt} + f_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$

Sea $z = f(x,y)$ (con derivadas parciales continuas f_x y f_y) donde $x = x(t,u)$ y $y = y(t,u)$

son funciones derivables. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial t} + f_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial u} = f_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial u} + f_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}$$

además la diferencial total de f tiene la misma forma, como si u,v fueran variables independientes,

$$df = f_u\,du + f_v\,dv$$

La última afirmación del teorema indica que si $f(x,y)$ es una función de variables independientes, entonces

$$df = Pdx + Qdy \implies f_x = P \ \text{ y } \ f_y = Q.$$

La regla de la cadena, para funciones de varias variables, no es en realidad una herramienta de cálculo sino más bien una herramienta de gran valor teórico. Si se conocen todas las funciones involucradas, resulta sencillo sustituir y derivar usando la regla de la cadena para una variable. En otro caso, siempre podemos seguir adelante usando la regla de la cadena para varias variables como pronto veremos.

■ **EJEMPLO 3.22**

Sea $z = x^2 + 3y^2$, donde $x = e^t$ y $y = \cos(t)$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= z_x\frac{dx}{dt} + z_y\frac{dy}{dt} \\ &= 2x\frac{dx}{dt} + 6y\frac{dy}{dt} \\ &= 2xe^t - 6y\,\text{sen}(t) \\ &= 2e^{2t} - 6\cos(t)\,\text{sen}(t) \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 3.23**

Sea $z = x^2e^{y^3}$, donde $x = uv$ y $y = u^2 - v^3$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= z_x\frac{\partial x}{\partial u}+z_y\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 2xe^{y^3}\frac{\partial x}{\partial u}+3x^2y^2e^{y^3}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 2xe^{y^3}v+3x^2y^2e^{y^3}2u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= z_x\frac{\partial x}{\partial v}+z_y\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= 2xe^{y^3}\frac{\partial x}{\partial u}+3x^2y^2e^{y^3}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 2xe^{y^3}u+3x^2y^2e^{y^3}(-3v^2)\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 3.24**

Sea f una función derivable y $z=f(x/y)$. Poniendo $u=x/y$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\\ &= f'(u)\frac{1}{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\\ &= f'(u)\frac{-x}{y^2}\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 3.25**

Sea f una función derivable y $z=f(x,y)$ con $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\,\text{sen}\,\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\,\text{sen}\,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 3.26**

Decimos que una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n cuando

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y), \quad \text{para todo } \ t > 0$$

Si f es diferenciable y homogénea de grado n entonces

a.) Sin hacer ningún cálculo, explique porqué se puede asegurar que $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[t^{-n}f(tx,ty)\right] = 0$.

b.) Use regla de la cadena para calcular $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[t^{-n}f(tx,ty)\right]$ y deduzca que $uf_u(u,v)+vf_v(u,v) = nf(u,v)$.

c.) Calcule $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial v}$ y verifique, usando el ejercicio anterior, que $xf_x(x,y)+yf_y(x,y) = nf(x,y)$.

Solución.

a.) $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[t^{-n}f(tx,ty)\right] = 0$ pues, como f es homogénea, entonces $[t^{-n}f(tx,ty)] = f(x,y)$, es decir el lado derecho de la igualdad es una función sólo de x e y.

b.) Poniendo $u = xt$ y $v = yt$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-n}f(u,v)\right] = -nt^{-n-1}f(u,v) + t^{-n}\left(uf_u \ + \ vf_v\right) = 0$$

por lo que, multiplicando a ambos lados por t^{n+1},

$$uf_u(u,v) + vf_v(u,v) = nf(u,v)$$

c.) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial u} = f_x \cdot \dfrac{1}{t}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial v} = f_y \cdot \dfrac{1}{t}$. Sustituyendo en la última relación del ejercicio anterior

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = nf(x,y)$$

■ **EJEMPLO 3.27**

Sea $F(u,v) = -u - v$ con $u^2 = -x - y$ y $v^2 = x + y$. Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, verifique que

a.) $F_x = -\dfrac{u+v}{2uv}$.

b.) $F_y = -\dfrac{v-u}{2uv}$.

Solución.

Primero veamos que $2u\,u_x = -1$, $2v\,v_x = 1$, $2u\,u_y = -1$ y $2v\,v_y = 1$. Por lo tanto

a.) $F_x = F_u\,u_x + F_v\,v_x = -1 \cdot \dfrac{1}{2u} - 1 \cdot \dfrac{1}{2v} = -\dfrac{u+v}{2uv}$.

b.) $F_y = F_u\,u_y + F_v\,v_y = -1 \cdot \left(-\dfrac{1}{2u}\right) - 1 \cdot \dfrac{1}{2v} = -\dfrac{v-u}{2uv}$.

■ **EJEMPLO 3.28**

Sean f y g funciones diferenciables. Si $z = g(y) \cdot f(x - 2y, y^3)$, calcule

a.) z_x

b.) z_{xy}

Solución.

Sea $u = x - 2y$, $v = y^3$. Entonces $z = g(y)\,f(u,v)$.

a.) $z_x = g(y)\,(f_u \cdot 1 + f_v \cdot 0) = g(y)\,f_u(u,v)$

b.) $z_{xy} = g'(y) \cdot 1 \cdot f_u(u,v) \;+\; g(y)\left(-2\,f_{uu} \;+\; 3y^2 f_{uv}\right)$

3.5.2 Derivación Implícita.

Ya vimos que si z es una función de x y y, definida de manera implícita por la ecuación $F(x,y,z) = 0$, entonces podemos calcular z_x y z_y usando la regla de la cadena. El teorema que sigue, conocido como el *Teorema de la Función Implícita,* nos da una manera sencilla de calcular estas derivadas parciales y otras más generales en ciertas regiones.

Teorema 3.6 (De la Función Implícita (I)) *Sea z es una función de x y y, definida de manera implícita por la ecuación $F(x,y,z)=0$. Sea R una* región[2] *que contiene al punto (x_0,y_0,z_0) en su interior. Entonces, si*

i.) $F(x_0,y_0,z_0)=0$,

ii.) F_x,F_y,F_z *son continuas en* R

iii.) $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

existe un entorno I_0 del punto (x_0,y_0) en el cual hay una función diferenciable (única) $z=f(x,y)$ tal que

a.) $z_0=f(x_0,y_0)$,

b.) $F(x,y,f(x,y))=0$

c.) $z_x=-\dfrac{F_x}{F_z}$ *y* $z_y=-\dfrac{F_y}{F_z}$

Este teorema dice que en un entorno del punto (x_0,y_0) existe una función $f(x,y)$ cuya gráfica coincide con la gráfica de $F(x,y,z)=0$ en este entorno. Aunque no sea posible en principio hallar esta función f, por lo menos podemos calcular las derivadas parciales de esta función en el entorno del punto, según la fórmula que establece el teorema.

Podemos deducir, de manera informal, las fórmulas para z_x y z_y. Como $F(x,y,z)=0$,

$$dF=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=0$$

de donde, si $F_z\neq 0$,

$$dz=-\frac{F_x}{F_z}\,dx-\frac{F_y}{F_z}\,dy$$

Ahora, si $f(x,y)$ es un función de variables independientes,

$$df=P\,dx+Q\,dy\implies f_x=P\ \text{ y }\ f_y=Q$$

entonces si $z=f(x,y)$ (esta función f no es necesariamente conocida), podemos concluir que [3]

[2] Una región en el plano xy es un conjunto de puntos con la propiedad de que cualquier par de ellos puede ser unido por una curva continua que está en el conjunto. Un rectángulo sería un ejemplo de región.
[3] Un análisis riguroso se puede encontrar en ([1], [2]). Ver "Teorema de la Función Implícita".

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

En el teorema de la función implícita podemos intercambiar variables. Por ejemplo, si x y z son las variables independientes y si se cumplen las hipótesis del teorema,

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{y} \quad y_z = -\frac{F_z}{F_y}.$$

Este teorema se puede generalizar para ecuaciones $F(x,y,z,u) = 0$.

■ EJEMPLO 3.29

Sea $F(x,y,z) = xyz + x + y - z = 0$. Para el punto $(0,0,0)$, $F(0,0,0) = 0$. En los alrededores de este punto, $F_x = yz+1, F_y = xz+1, F_z = xy-1$ son continuas y $F_z(0,0,0) \neq 0$.

Se garantiza entonces que, en los alrededores de $(0,0)$, en el plano xy, existe una función $z = f(x,y)$ cuya gráfica coincide con la gráfica de $F(x,y,z) = 0$ en este entorno y

$$z_x = -\frac{zy+1}{xy-1} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{zx+1}{xy-1}$$

En este caso también podemos obtener z_x y z_y usando la regla de la cadena a la ecuación $xyz + x + y - z = 0$. Derivando respecto a x y respecto a y, obtenemos

$$yz + xy\,z_x + 1 - z_x = 0 \implies z_x = -\frac{zy+1}{xy-1}.$$

$$xz + xy\,z_y + 1 - z_y = 0 \implies z_y = -\frac{zx+1}{xy-1}.$$

■ EJEMPLO 3.30

Calcule z_x y z_y si $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$, cuando $F_z \neq 0$.

Solución.

Dado que $F_x = 2x$, $F_y = -4x - z + 1$, $F_z = 6z - y$, entonces si $F_z \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe una función $z = f(x,y)$ tal que

$$z_x = -\frac{2x}{6z-y} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{1-4y-z}{6z-y}$$

en $\mathbb{R}^2 - \{6z - y = 0.\}$

■ EJEMPLO 3.31

Considere $x^2+y^2+z^2-1=0$. Esta ecuación es satisfecha por todos los puntos de la esfera de radio 1 centrada en el origen. Las derivadas parciales de $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ son continuas en cualquier entorno de estos puntos pues

$$F_x = 2x, \;\; F_y = 2y, \;\; F_z = 2z$$

entonces en un entorno de cualquiera de los puntos (x_0, y_0) (con $F(x_0,y_0,z_0)=0$), excepto en los puntos del círculo $x^2+y^2=1,\ z=0$,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z} \;\; \text{y} \;\; z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z}$$

Podemos además calcular z_{xy}, z_{xx} y z_{yy}

$$z_{yx} = \frac{\partial(z_y)}{\partial x} = \frac{y \cdot z_x}{z^2} = \frac{y\left(-\dfrac{x}{z}\right)}{z^2}$$

$$z_{xx} = \frac{\partial(z_x)}{\partial x} = -\frac{z - x z_x}{z^2} = -\frac{z - x\left(-\dfrac{x}{z}\right)}{z^2}$$

$$z_{yy} = -\frac{y^2+z^3}{z^3}.$$

■ EJEMPLO 3.32

Si $F(xz, yz) = 0$ define a z como función implícita de x e y y además cumple con las condiciones del teorema de la función implícita en cada punto de una región R, entonces verifique que, en R, se satisface la ecuación

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -z$$

Solución.

Sea $u = xz$ y $v = yz$, entonces $F(xz, yz) = F(u, v) = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_u \cdot 0 + F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_u \cdot z + F_v \cdot 0}{F_u \cdot x + F_v \cdot y}$$

Luego

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= -y \cdot \frac{F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} + -x \cdot \frac{F_u \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\ &= -\frac{z(F_u \cdot x + F_v \cdot y)}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\ &= -z \end{aligned}$$

Caso de dos Ecuaciones.

En el caso de que tengamos dos ecuaciones

$$F(x,y,u,v) = 0 \ \text{ y } \ G(x,y,u,v) = 0$$

tenemos una teorema similar

Teorema 3.7 (De la Función Implícita (II)) *Sea R una* región *que contiene al punto (x_0,y_0,u_0,v_0) en su interior. Entonces, si*

i.) $F(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$ *y* $G(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$

ii.) $F_x, F_y, F_u, F_v, G_x, G_y, G_u, G_v$ *son continuas en* R

iii.) $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$ *en* (x_0,y_0,u_0,v_0),

existe un entorno I_0 del punto (x_0,y_0) en el cual

$$u_x = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad u_y = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

y

$$v_x = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad v_y = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

Para deducir las expresiones para u_x, u_y, v_x, v_y se resuelve el sistema

$$\begin{cases} dF = F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ dG = G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{cases}$$

para du y dv. Por ejemplo

$$du = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} dx - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} dy$$

como $du = u_x\, dx + u_y\, dy$ entonces se obtienen las fórmulas para u_x y u_y.

■ **EJEMPLO 3.33**

- Las ecuaciones

$$F = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0$$

$$G = u + v - x^2 + y = 0$$

son satisfechas por $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2,1,1,2)$. Como

$$J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(u-v)$$

entonces en $J(2,1,1,2) = -2 \neq 0$. En un entorno de $(x_0, y_0) = (2,1)$ se tiene

$$u_x = \frac{x(1-2v)}{u-v} \quad \text{y} \quad u_y = \frac{1+2v}{2(u-v)}.$$

- Podemos obtener este resultado no usando las fórmulas sino resolviendo

$$\begin{cases} dF = 2u\,du + 2v\,dv - 2x\,dx - dy = 0 \\ dG = du + dv - 2x\,dx + dy = 0 \end{cases}$$

para du y dv,

En particular

$$du = \frac{(2x+4vx)\,dx + (1+2v)\,dy}{2(u-v)}$$

luego, como $du = u_x\,dx + u_y\,dy$, entonces

$$u_x = \frac{(2x+4vx)}{2(u-v)} \quad \text{y} \quad u_y = \frac{1+2v}{2(u-v)}.$$

Usando este mismo método, y bajo la hipótesis de que $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \neq 0$ en el punto (x_0,y_0,u_0,v_0), podemos resolver el sistema para dx y dy y obtener x_u, x_v, y_u y y_v.

Por ejemplo, en un entorno del punto en cuestión

$$x_u = \frac{2u+1}{4x} \quad \text{y} \quad x_v = \frac{2v+1}{4x.}$$

■ EJEMPLO 3.34

Sea $z = f(x,y)$ definida por $z = u+v$ donde $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$\begin{aligned} F &= u + e^{u+v} - x = 0 \\ G &= v + e^{u-v} - y = 0 \end{aligned}$$

Si $u = v = 0$ entonces $x = y = 1$. Calcular $z_x(1,1)$.

Solución.

$z_x = u_x + v_y$. Podemos calcular u_x y v_y usando las fórmulas respectivas, sin embargo, para cálculos numéricos es más práctico derivar respecto a x las expresiones $F = 0$ y $G = 0$. En efecto, derivando respecto a x obtenemos

$$u_x + e^{u+v}(u_x + v_x) - 1 = 0 \quad \text{y} \quad v_x + e^{u-v}(u_x - v_x) = 0$$

de modo que cuando $x = 1, y = 1, v = u = 0$ se obtiene

$$2u_x + v_x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad u_x = 0$$

con lo que $u_x = 0$ $v_x = 1$ si $x = 1, y = 1, v = u = 0$. Así que $z_x(1,1) = 0 + 1 = 1$.

3.6 EJERCICIOS RESUELTOS (ADICIONALES)

1. Sea $z = \sqrt{xy + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$. Demuestre que $zx\frac{\partial z}{\partial x} + zy\frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

   Solución.

   - $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y - \dfrac{y}{x^2+y^2}}{2z}$
   - $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x + \dfrac{x}{x^2+y^2}}{2z}$
   - Ahora sustituimos,

$$\begin{aligned} zx\frac{\partial z}{\partial x} + zy\frac{\partial z}{\partial y} &= zx\,\frac{y - \dfrac{y}{x^2+y^2}}{2z} + zy\,\frac{x + \dfrac{x}{x^2+y^2}}{2z} \\ &= \frac{2xy - \dfrac{xy}{x^2+y^2} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}}{2} = xy \end{aligned}$$

2. Sea $C(x,t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la ecuación (de difusión)

$$\frac{k}{4}\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

   Solución.

Pongamos $C(x,t) = \dfrac{e^{-x^2/kt}}{\sqrt{t}}$.

- $\dfrac{\partial C}{\partial t} = \dfrac{\left(\sqrt{t}\,\dfrac{-2x}{kt} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)e^{-x^2/kt}}{t} = e^{-x^2/kt}\left(\dfrac{x^2}{kt^{5/2}} - \dfrac{1}{2t^{3/2}}\right)$
- $\dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\dfrac{-2x}{kt}\,e^{-x^2/kt}$
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^{-x^2/kt}\,\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{4x^2}{k^2t^2} - \dfrac{2}{kt}\right) = e^{-x^2/kt}\left(\dfrac{4x^2}{k^2t^{5/2}} - \dfrac{2}{kt^{3/2}}\right)$
- Luego, multiplicando $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ por $\dfrac{k}{4}$ se obtiene la identidad.

3. Sea $z = f(u,v)$, donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$, donde f tiene derivadas parciales de segundo orden f_u, f_{uv}, f_{uu} y f_{vv} continuas (es decir, $f_{uv} = f_{vu}$). Verifique que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f_u(u,v) + 4x^2 f_{uu}(u,v) + 4xy f_{uv} + y^2 f_{vv}(u,v)$$

Solución.

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x f_u(u,v) + y f_v(u,v)$
- Aplicamos la regla del producto (observe que $\dfrac{\partial}{\partial x} f_u(u,v) = f_{uu}\cdot u_x + f_{uv}\cdot v_x$).

  $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f_u(u,v) + 2x\,[2x f_{uu}(u,v) + y f_{uv}(u,v)] + y\,[2x f_{vu}(u,v) + y f_{vv}(u,v)]$
- Simplificando se obtiene el resultado.

4. Sea Sea $z = f(xy,x)$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden f_u, f_{uv}, f_{uu} y f_{vv}, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Solución.

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_u(u,v)\cdot y + f_v(u,v)\cdot 1$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1\cdot f_u + y\,[f_{uu}(u,v)\cdot x + f_{uv}(u,v)\cdot 0] + [f_{vu}(u,v)\cdot x + f_{vv}(u,v)\cdot 0]$

5. Si $x^2y^2 + \operatorname{sen}(xyz) + z^2 = 4$ define a z como función implícita de x e y. verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Solución.

Sea $F(x,y,z) = x^2y^2 + \text{sen}(xyz) + z^2 - 4$. Si las derivadas parciales z_x y z_y existen en todo el dominio en el que $F_z \neq 0$, entonces

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{2xy^2 + yz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz) + 2z}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{2x^2y + xz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz) + 2z}$

(a) La identidad se obtiene sustituyendo y simplificando.

6. Sea $g\left(\dfrac{xy}{z}, x^2+y^2\right) = 0$ una ecuación que define a z como una función de x e y. Verifique que si g_x, g_y y g_z existen y son continuas en toda la región en la que $g_z \neq 0$, entonces

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z(x^2-y^2)}{xy}$$

Solución.

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{g_x}{g_z} = -\dfrac{g_u \cdot \dfrac{y}{z} + g_v \cdot 2x}{-g_u \cdot \dfrac{xy}{z^2}}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{g_y}{g_z} = -\dfrac{g_u \cdot \dfrac{x}{z} + g_v \cdot 2y}{-g_u \cdot \dfrac{xy}{z^2}}$
- $y \cdot \dfrac{g_u \cdot \dfrac{y}{z} + g_v \cdot 2x}{g_u \cdot \dfrac{xy}{z^2}} - x \cdot \dfrac{g_u \cdot \dfrac{x}{z} + g_v \cdot 2y}{g_u \cdot \dfrac{xy}{z^2}} = -\dfrac{g_u\left(\dfrac{x^2-y^2}{z}\right)}{g_u \cdot \dfrac{xy}{z^2}} = -\dfrac{z(x^2-y^2)}{xy}$

Capítulo 4

GRADIENTE, DERIVADAS DIRECCIONALES Y PLANO TANGENTE

4.1 VECTOR GRADIENTE.

Definición 4.1 (Vector Gradiente) *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función (o campo) escalar diferenciable en una región R, entonces la función (o campo) gradiente de f es la función vectorial $\nabla f : R \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\, f_{x_1}(x,y),\, f_{x_2}(x,y), ..., f_{x_n}(x,y))$$

En el caso $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y),\, f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\overrightarrow{j}$$

En el caso $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z),\, f_y(x,y,z)\, f_z(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{k}$$

EJEMPLO 4.1

1. Si $f(x,y) = \operatorname{sen} xy + x^2y^2$, calcule $\nabla f(\pi, 1)$.

   Solución.

   El gradiente está dado por :

   $\nabla f(x,y) = \left(y\cos xy + 2xy^2\right)\ \overrightarrow{i} + \left(x\cos xy + 2x^2y\right)\ \overrightarrow{j}$

   y evaluando

   $\nabla f(\pi, 1) = (2\pi - 1)\ \overrightarrow{i} + \left(2\pi^2 - \pi\right)\ \overrightarrow{j}$

2. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, calcule $\nabla z(x,y)$.

   Solución.

   Excepto en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ (curva de nivel $z = 0$), se puede calcular

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z},\right) = -\frac{x}{z}\ \overrightarrow{i} + -\frac{y}{z}\ \overrightarrow{j}$$

4.2 DERIVADA DIRECCIONAL

Suponga que deseamos calcular la tasa de cambio de z en el punto (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\overrightarrow{u} = (a,b)$, para esto consideremos la superficie S con ecuación $z = f(x,y)$ (la gráfica de f) y sea $z_0 = f(x_0, y_0)$. Entonces el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ está sobre S. El plano vertical que pasa por el punto Pen la dirección del vector $\overrightarrow{u}$ interseca a la superficie S en la curva C. La pendiente de la recta tangente T a la curva C en el punto$P$es la tasa de cambio de z en la dirección del vector $\overrightarrow{u}$.

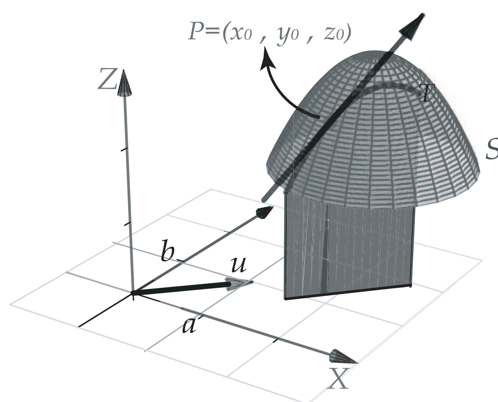


Figura 4.1 Derivada direccional

Si $Q=(x,y,z)$ es otro punto sobre la curva C, y sean P' y Q' las proyecciones sobre el plano xy de los vectores P y Q, entonces el vector $\overrightarrow{P'Q'}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{u}$, y por consiguiente

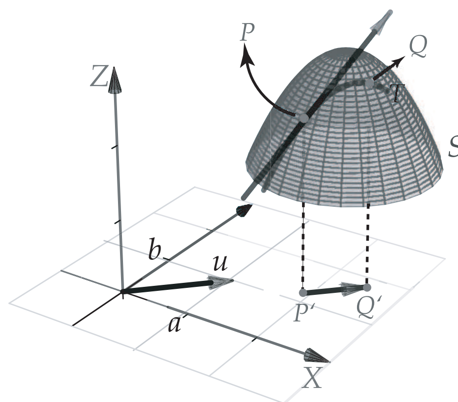


Figura 4.2 El vector $\overrightarrow{P'Q'}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\,\overrightarrow{u} = (ha,hb)$$

para algún escalar h. Así pues,

$$\begin{aligned} x-x_0 &= ha \Longrightarrow x = x_0+ha \\ y-y_0 &= hb \Longrightarrow y = y_0+hb \end{aligned}$$

y la razón de cambio está dada por

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y al tomar el límite cuando $h \longrightarrow 0$ obtenemos la tasa de cambio instantánea de z(con respecto a la distancia) en la dirección de $\overrightarrow{u}$, la cual se llama derivada direccional de f en la dirección de $\overrightarrow{u}$.

Definición 4.2 (Derivada direccional) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y sean $P = (x_0, y_0) \in D$ y $\overrightarrow{u} = (a, b)$ un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en $P = (x_0, y_0)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u}$, está dada por :*

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{u}} f(P) &= D_{\overrightarrow{u}} f(x_0, y_0) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\overrightarrow{u}) - f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

Observación: Al comparar la definición de derivada parcial con la de derivada direccional, podemos notar que si $\overrightarrow{u} = (1, 0)$ entonces $D_{\overrightarrow{u}} f(P) = f_x(P)$ y si $\overrightarrow{u} = (0, 1)$ entonces $D_{\overrightarrow{u}} f(P) = f_y(P)$, es decir, las derivadas parciales son derivadas direccionales en la dirección de los vectores canónicos.

■ **EJEMPLO 4.2**

Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ en el punto $P = (1, 1, 2)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Solución.

Usando la definición de derivada direccional, tenemos que :

$$
\begin{aligned}
D_{\overrightarrow{u}} f(1,1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(1+\dfrac{h}{\sqrt{2}}, 1+\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1,1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4 - \left(1+\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(1+\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2 - \left(1+\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(1+\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2\left(1+\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}{h}
\end{aligned}
$$

y usando la regla de L'Hôpital

$$
\lim_{h \to 0} -4\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}
$$

Esto nos dice que la razón de cambio de z en P en la dirección del vector $\overrightarrow{u}$ es $-2\sqrt{2}$, es decir, que z en esta dirección esta decreciendo. En la figura 4.3 se ilustra esta situación.

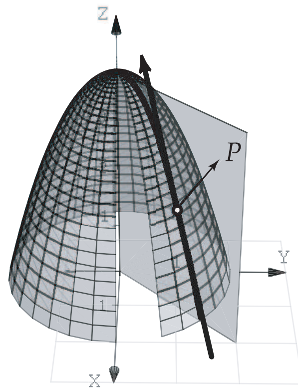


Figura 4.3 Tangente en P tiene pendiente $-2\sqrt{2}$.

Observación: la definición de derivada direccional es válida en general para funciones de n variables $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Con propósitos de cálculo, la definición de derivada direccional no es muy útil, por lo que en general se usa la fórmula que se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 4.1 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable en D, entonces f tiene derivada direccional en la dirección de cualquier vector no nulo $\overrightarrow{u} = (a,b)$ y está dada por:*

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} = f_x(x,y)\frac{a}{||\overrightarrow{u}||} + f_y(x,y)\frac{b}{||\overrightarrow{u}||}$$

Observación: Recuerde que la componente de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ es $\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{||u||}$, la cual es la longitud de la proyección vectorial de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$ $\left(Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{||u||}\overrightarrow{u}\right)$. Con lo cual, la fórmula

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$$

nos dice que la derivada direccional es la componente del vector gradiente $\nabla f(P)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u}$.

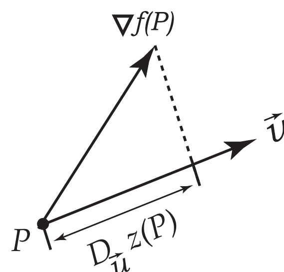


Figura 4.4 $D_{\overrightarrow{u}} f(x,y)$ es la componente del vector gradiente $\nabla f(x,y)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u}$

■ **EJEMPLO 4.3**

Calcule la derivada direccional $D_{\overrightarrow{u}} f(x,y)$ si $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ y $\overrightarrow{u}$ es el vector unitario dado por $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Cuánto es $D_{\overrightarrow{u}} f(1,2)$?

Solución.

Usando el resultado del teorema anterior

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) &= f_x(x,y)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + f_y(x,y)\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3}y - 3x + 8y\right) \end{aligned}$$

De donde

$$D_{\overrightarrow{u}}f(1,2) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 3 + 16\right) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

■ **EJEMPLO 4.4**

Calcule la derivada direccional de $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y,z)$ si $f(x,y,z) = x\,\text{sen}(yz)$, en el punto $P = (1,3,0)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Solución.

El vector gradiente de la función f esta dado por

$$\nabla f(x,y,z) = (\text{sen}(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz))$$

evaluando en P tenemos que $\nabla f(1,3,0) = (0,0,3)$. Por otro lado un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{v}$ es

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k}$$

Por tanto

$$D_{\overrightarrow{u}}f(1,3,0) = \nabla f(1,3,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Suponga que tenemos una función f de dos o de tres variables y consideramos todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto P dado. Esto proporciona las tasas de cambio de f en todas las posibles direcciones. De modo que podemos plantear la siguiente pregunta : ¿en cuál de estas direcciones f cambia con mayor velocidad?, y ¿cuál es la máxima razón de cambio?. Las respuestas a estas preguntas las da el siguiente teorema.

Teorema 4.2 (Dirección de máximo cambio) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ es $||\nabla f(x,y)||$ y se presenta cuando el vector no nulo $\overrightarrow{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(x,y)$.*

Podemos justificar esto, informalmente, de la manera que sigue.

Primero recordemos que

$$u \cdot v = ||u|| \cdot ||v|| \cos(\theta)$$

Ahora

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) &= \nabla f(x,y) \cdot \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} \\ &= ||\nabla f(x,y)|| \cos\theta \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo entre el vector *unitario* $\dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ y el vector $\nabla f(x,y)$.

El valor de $D_{\overrightarrow{u}} f(x,y)$ aumenta o disminuye solo si $\cos\theta$ cambia (si giramos el vector $\overrightarrow{u}$).

Así que el máximo valor se obtiene cuando $\cos\theta = 1$ (es decir $\theta = 0$ o π) lo cual indica que $\overrightarrow{u}$ debe ser paralelo al gradiente $\nabla f(x,y)$. El resultado se obtiene notando que la magnitud del vector no importa (excepto si es nulo) pues se toma unitario.

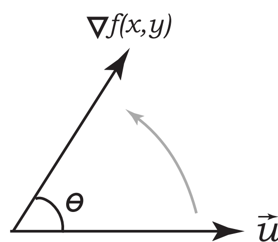


Figura 4.5

■ **EJEMPLO 4.5**

Suponga que la temperatura en un punto (x,y,z) en el espacio está dada por

$$T(x,y,z) = \frac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$$

donde T está medida en grados centígrados y x,y,z están en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura respecto punto $(1,1,-2)$? ¿Cuál es la máxima tasa de incremento ?

Solución.

El gradiente de T es

$$\nabla T(x,y,z) = -\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\,\overrightarrow{i} - \frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\,\overrightarrow{j} - \frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\,\overrightarrow{k}$$

Evaluando en el punto $P=(1,1,-2)$ obtenemos

$$\nabla T(1,1,-2) = \frac{5}{8}\left(-\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}\right)$$

Por tanto, la temperatura se incrementa con mayor rapidez en la dirección del vector gradiente

$$\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$$

La tasa máxima de incremento es la longitud del vector gradiente

$$||\nabla T(1,1,-2)|| = \frac{5}{8}\left|\left|-\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}\right|\right| = \frac{5\sqrt{41}}{8}$$

Observación: el valor mínimo de la derivada direccional es $-||\nabla f(x,y)||$ y ocurre cuando $\overrightarrow{u}$ tiene la dirección $-\nabla f(x,y)$,

■ **EJEMPLO 4.6**

Considere la placa rectangular que se muestra en la figura siguiente. La temperatura en un punto (x,y) de la placa está dada por

$$T(x,y) = 5 + 2x^2 + y^2$$

Determine la dirección en la que debe de ir un insecto que esta en el punto $(4,2)$, para que se enfríe lo más rápidamente. Figura 4.6

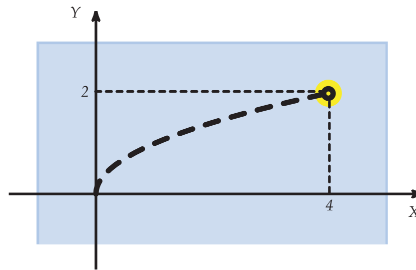


Figura 4.6 Mejor trayectoria para el insecto.

Solución

Para que el insecto se enfríe más rápidamente debe seguir una dirección opuesta al gradiente, es decir

$$-\nabla T(x,y) = (-4x,-2y) \Longrightarrow -\nabla T(4,2) = (-16,-4)$$

O sea, debe ir en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = -16\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$.

4.2.1 (*) Vector Unitario Tangente.

Sea $r: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si la función vectorial r es continua en I, entonces la gráfica de r se le llama *curva* y decimos que esta curva esta descrita paramétricamente por $r(t)$.

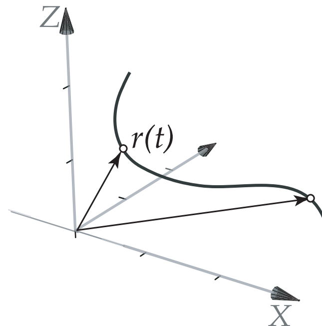


Figura 4.7 Curva descrita por el vector de posición $r(t)$.

Los ejemplos más comunes son las rectas en $\mathbb{R}^3$. Si la recta L pasa por P en dirección de $\overrightarrow{u}$ entonces $r(t) = P + t\,\overrightarrow{u}$, $t \in \mathbb{R}$. Otro ejemplo son las elipses de ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Una parametrización es

$$r(t) = (h + a\cos(t))\ \overrightarrow{i} + (k + b\,\text{sen}(t))\ \overrightarrow{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

La derivada de r (si existe) es $r'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{r(t+h) - r(t)}{h}$. Si $x(t)$ y $y(t)$ son funciones derivables en I y si $r(t) = x(t)\ \overrightarrow{i} + y(t)\ \overrightarrow{j}$, entonces $r'(t) = x'(t)\ \overrightarrow{i} + y'(t)\ \overrightarrow{j}$.

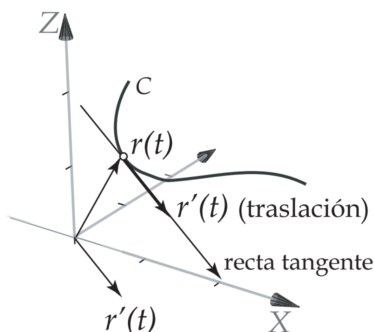


Figura 4.8 $r'(t)$.

La interpretación geométrica de $r'(t)$ sugiere la siguiente definición

Definición 4.3 *Sea C una curva descrita por la función vectorial continua r. Si existe la derivada $r'(t)$ y no es nula, la recta que pasa por $r(t)$ y es paralela a $r'(t)$ se llama tangente a C en $r(t)$. El vector $r'(t)$ se denomina vector tangente a C en $r(t)$.*

El vector unitario tangente T es una función vectorial asociada a la curva C y se define como

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{r'(t)}{||r'(t)||}, \quad si \quad ||r'(t)|| \neq 0$$

■ **EJEMPLO 4.7**

Considere el ejemplo (4.6), observe que $(0,0)$ es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria que debe seguir, hacia el origen, un insecto que busca el frío partiendo del punto $(4,2)$.

Solución.

Si $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\ \overrightarrow{i} + y(t)\ \overrightarrow{j}$ es la ecuación vectorial de la trayectoria entonces

$$
\begin{aligned}
-\nabla f(x,y) &= (x'(t), y'(t)) \\
(-4x, -2y) &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -4x \\[2ex]
\dfrac{dy}{dt} = -2y
\end{cases} \tag{4.1}
$$

y las condiciones iniciales

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 4 \\
y(0) &= 2
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (4.1) se resuelve fácilmente integrando, pues cada ecuación diferencial es en variables separadas.

$$
\begin{aligned}
\ln(x) &= -4t + c_1 \\
\ln(y) &= -2t + c_2
\end{aligned}
$$

y usando las condiciones iniciales (4.2) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\ln(x) &= -4t - \ln(4) \\
\ln(y) &= -2t - \ln(2)
\end{aligned}
$$

simplificando

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x}{4}\right) &= -4t \\
\ln\left(\frac{y}{2}\right) &= -2t
\end{aligned}
$$

despejando, obtenemos que la trayectoria que debe seguir el insecto es $y^2 = x$ (vea la figura 4.6).

■ **EJEMPLO 4.8**

La altura de una montaña, en metros sobre el nivel del mar, está dada por

$$z = 2000 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}$$

Si un alpinista comienza su ascenso al nivel del mar en $x = 20\sqrt{10}$ y $y = 20\sqrt{5}$ ¿Cuál es la trayectoria en el plano xy que corresponde a la ruta más empinada de ascenso a la montaña?

Solución

Sabemos que en cada punto de la montaña la dirección de ascenso con mayor pendiente esta dada por el gradiente

$$\nabla z = \left(-\frac{x}{2}, -y\right)$$

Esto significa que este vector es tangente a la proyección de la trayectoria de ascenso en el plano xy, es decir, si $\overrightarrow{r} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$ es dicha trayectoria, entonces

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(-\frac{x}{2}, -y\right)$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{2} \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

Para resolverlo podemos observar que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$

cuya solución es

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(x)+c \\ y &= cx^2 \end{aligned}$$

Y usando las condiciones iniciales $x(0)=20\sqrt{10},\ c=\dfrac{\sqrt{5}}{200},\ y(0)=20\sqrt{5}$
Así, la trayectoria que debe seguir es

$$y=\frac{\sqrt{5}}{200}x^2$$

En la figura 4.9 se muestra la curva de nivel $z=0$ y la trayectoria $y=\dfrac{\sqrt{5}}{200}x^2$.

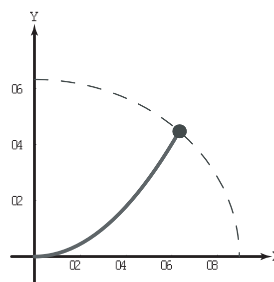


Figura 4.9 Trayectoria en el plano xy.

■ EJEMPLO 4.9

¿Cuál es la razón de cambio de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z-4$, a lo largo de la curva

$$\vec{r}(t)=\frac{3}{2}\cos(\theta)\ \vec{i}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right)\ \vec{j}+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right)\ \vec{k}$$

en el punto que corresponde a $\theta=\dfrac{\pi}{4}$?.

Solución.

Cuando decimos "a lo largo de la curva", queremos significar "en la dirección del vector tangente a la curva". Primero, el punto en la curva es

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ \vec{i}+\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ \vec{j}+\frac{3\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}}\ \vec{k}$$

Un vector tangente a la curva está dado por

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta)\ \vec{i}+\frac{3}{2}\cos(\theta)\ \vec{j}-\frac{3}{2}\cos(\theta)\ \vec{k}$$

y por tanto un vector unitario tangente es

$$\overrightarrow{T}(\theta) = \frac{-\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{1+\cos^2(\theta)}}\,\overrightarrow{i} + \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+\cos^2(\theta)}}\,\overrightarrow{j} - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+\cos^2(\theta)}}\,\overrightarrow{k}$$

Evaluando en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\overrightarrow{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3}\,\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\overrightarrow{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\overrightarrow{k}$$

Por otro lado, el gradiente de f es

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 1)$$

Evaluando en P

$$\nabla f(P) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

Así la derivada direccional está dada por

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 1\right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

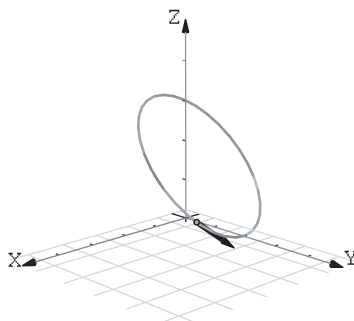


Figura 4.10 Vector unitario tangente $\overrightarrow{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4.3 PLANO TANGENTE.

4.3.1 Gradiente y Curvas y Superficies de Nivel.

Recordemos que si $z = f(x,y)$ entonces la curva $z = c$ (es decir $c = f(x,y)$) la llamamos curva de nivel. Si tenemos $w = g(x,y,z)$, la superficie $w = 0$ (es decir $0 = g(x,y,z)$), se denomina *superficie de nivel* $w = 0$. Anteriormente veíamos que el gradiente es tangente a las trayectorias. En cambio, cuando se trata de curvas o superficies de nivel, la situación cambia.

Si S es una superficie de ecuación $G(x,y,z) = 0$, con G derivable con continuidad en el plano, y si $P = (p_1, p_2, p_3) \in S$, entonces,

1. si se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita en P se tiene,

$$\nabla z(x,y) = \left(-\frac{G_x}{G_z}, -\frac{G_y}{G_z}\right)$$

   El vector $z(p_1, p_2)$ es perpendicular a la curva de nivel $z = p_3$, es decir $\nabla f(p_1, p_2)$ es perpendicular al vector tangente en (p_1, p_2).

   Por supuesto, si la ecuación de la superficie es $z = f(x,y)$, podemos calcular el gradiente de la manera usual. Para el resultado que sigue, si necesitamos la función G que sería $G = z - f(x,y) = 0$.

2. el vector $\nabla G(p_1, p_2, p_3)$ es perpendicular a la superficie de nivel $w = 0$, es decir $\nabla G(p_1, p_2, p_3)$ es perpendicular a cada curva de la superficie S, que pasa por (p_1, p_2, p_3).

■ EJEMPLO 4.10

Considere la elipse C de ecuación $2x^2+3y^2-3x+3y=1$. Sea $P=\left(0,\,\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}\right)$. Observe que $P\in C$. Calcule un vector *perpendicular* a la elipse en P.

Solución.
Podemos ver la elipse como una curva de nivel de $z=2x^2+3y^2-3x+3y$, concretamente la curva de nivel $z=1$. De acuerdo a la teoría, el vector $\nabla z(P)$ es perpendicular a la curva de nivel (elipse) en P. Veamos

$$\nabla z(x,y)=(4x-3,\,6y+3)$$
$$\nabla z(P)=(-3,\,\sqrt{21})$$

En la figura 4.11 se muestra gráficamente la situación.

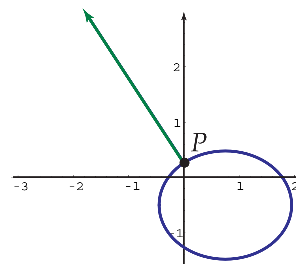


Figura 4.11 Vector normal en P

4.3.2 Plano Tangente.

Finalmente si G es derivable con continuidad en P y si el gradiente en P es no nulo, los vectores tangentes a cada curva en S que pasan por P forman un *plano tangente*. $\nabla G(p_1,p_2,p_3)$ es un vector normal a este plano.

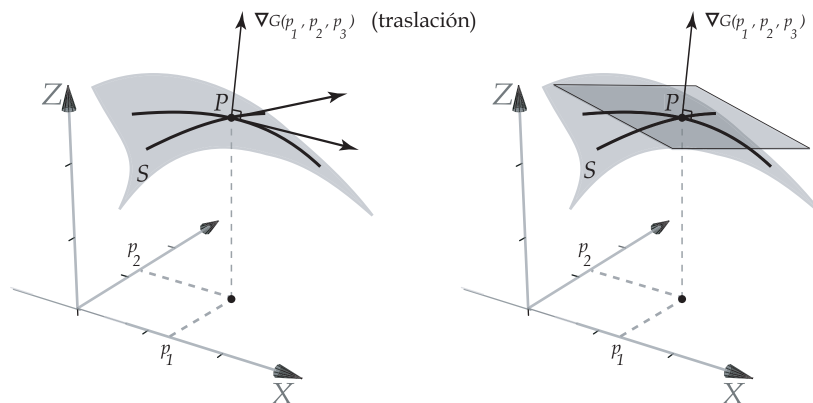


Figura 4.12 Plano Tangente.

Así, la ecuación del plano tangente en P es

$$ax + by + cz = d$$

con $(a,b,c) = \nabla G(p_1, p_2, p_3)$ y $d = \nabla G(p_1, p_2, p_3) \cdot P$.

■ **EJEMPLO 4.11**

1. Sea S la superficie de ecuación $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Aunque $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, no hay plano tangente pues la función es discontinua en este punto (aunque esté definida).

2. Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$. Sea $P = (1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3}) \in S$. Calculemos la ecuación cartesiana del plano tangente en P.

   - $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$.
   - $\nabla G(x,y,z) = (2x,\, 2y,\, 2z)$.
   - $N = \nabla G(P) = (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ y $d = P \cdot \nabla G(P) = 2$
   - Plano tangente: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,y + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,z = 2$ o también $x+y+z = \sqrt{3}$.

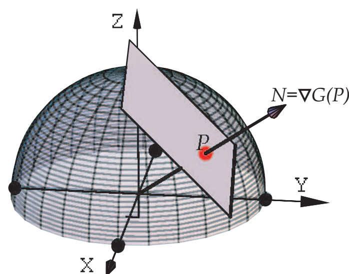


Figura 4.13 Plano Tangente a S en P.

3. Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$. Sea $P = (1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3}) \in S$.

   - El gradiente es $\nabla z(x,y) = \left(-\dfrac{x}{z}, -\dfrac{x}{z}\right)$. Como se ve, no está definido si $z = 0$ pues aquí las tangentes son rectas verticales.

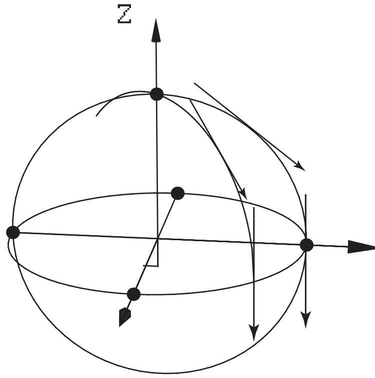


Figura 4.14 Tangentes en $z = 0$.

- La pendiente de la recta tangente en P en la dirección de $\overrightarrow{u} = (1,1)$ es

$$D_{(1,1)}z(P) = \nabla z(1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3}) \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

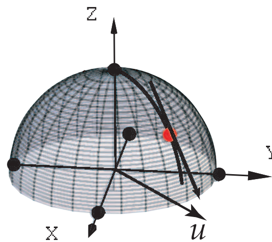


Figura 4.15 Tangentes en P en la dirección de $(1,1)$

- El gradiente $\nabla z(1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3})$ es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ en P. La derivada direccional en la dirección del vector unitario tangente es cero. Geométricamente, la recta L, en la figura 4.16, tiene pendiente cero.

  Esto es así pues

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{T}} f(P) &= \nabla f(P) \cdot \overrightarrow{T} = 0 \quad \text{(¿porqué?. Haga el cálculo!.)} \\ &= ||\nabla f(P)|| \cos\theta = 0 \end{aligned}$$

  lo cual implica que $\theta = \pi/2$.

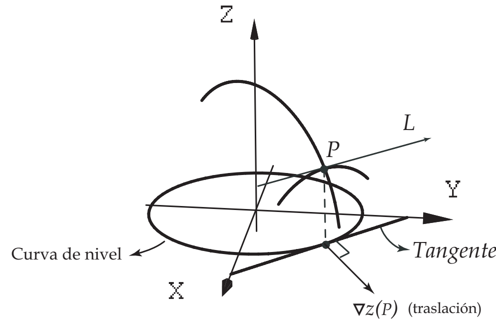


Figura 4.16

4. Consideremos la superficie S de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. Encuentre los puntos $Q=(a,b,c)\in S$ tal que el plano tangente en Q sea paralelo al plano $2x-y+3z=1$.

Solución.

Q tiene tres incógnitas así que necesitamos, en principio, tres ecuaciones.

- Como $Q\in S$, esto nos da una ecuación: $a^2+b^2+c^2=1$.

- Como el plano tangente en Q es paralelo al plano $2x-y+3z=1$, sus vectores normales deben ser paralelos, es decir

$$\nabla G(Q)=\lambda(2,-1,3)$$

  esto nos da tres ecuaciones adicionales y una incógnita más, λ.

- Para encontrar Q solo debemos resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2+c^2 & = & 1 \\ \nabla G(Q) & = & \lambda(2,-1,3) \end{array}\right.$$

  es decir,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2+c^2 & = & 1 \\ (2a,2b,2c) & = & \lambda(2,-1,3) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2+c^2 & = & 1 \\ 2a & = & 2\lambda \\ 2b & = & -\lambda \\ 2c & = & 3\lambda \end{array}\right.$$

Resolviendo, obtenemos las dos soluciones

$$Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}\right), \quad \text{y} \quad Q = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

5. Determine el punto $P = (x,y,z)$ de la superficie S, de ecuación $x^2 - y^2 + 6z = 0$, de modo que el plano tangente a la superficie en P contiene al punto $Q = (0,1,0)$ y es paralelo a la recta L de ecuación $(0,0,1) + t(2,1,0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Solución.

Un vector normal al plano tangente debe ser perpendicular al vector dirección de la recta L y al vector $(0,1,0) - P)$, es decir es perpendicular al producto cruz de estos dos últimos vectores.

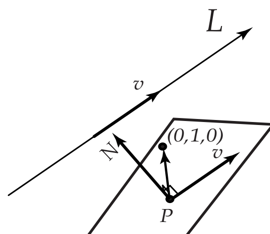


Figura 4.17 Un vector normal al plano tangente.

La recta L va en la dirección $\overrightarrow{v} = (2,1,0)$. Tenemos dos vectores normales al plano tangente a S en $P = (x,y,z)$, $\nabla G(P) = (2x, -2y, 6)$ y $N = ((0,1,0) - P) \times (2,1,0) = (z, -2z, -2 - x + 2y)$.

Entonces tenemos el sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6z &= 0 \\ (2x, -2y, 6) &= \lambda(z, -2z, -2 - x + 2y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 6z &= 0 & (1) \\ 2x &= \lambda z & (2) \\ -2y &= -2\lambda z & (3) \\ 6 &= \lambda(-2 - x + 2y) & (4) \end{cases}$$

De (2) y (3) tenemos $y = 2x$ y usando (1) tenemos $z = \dfrac{x^2}{2}$. Ahora sustituimos estos resultados en (2),

$$2x = \lambda z \Longrightarrow 2x + \frac{\lambda x^2}{2} = 0 \Longrightarrow 2x\left(1 - \frac{\lambda x}{4}\right) = 0 \Longrightarrow x = 0 \ \text{ o } \ \lambda x = 4$$

- si $x = 0$ entonces $y = 0,\ z = 0$ y $\lambda = -3$

- si $\lambda x = 4$ entonces de (4)

  - $6 = \lambda(-2 - x + 2y) \implies 6 = -2\lambda - \lambda x + 4\lambda x \implies \lambda = 3$

  - como $\lambda x = 4 \implies x = \dfrac{4}{3}$ y entonces $y = \dfrac{8}{3}$ y $z = \dfrac{8}{9}$

Los puntos de la superficie buscados son $P = (4/3, 8/3, 8/9)$ y $P = (0,0,0)$. Las ecuación de cada plano tangente es

$$\frac{8x}{3} - \frac{16y}{3} + 6z = -\frac{16}{3} \quad \text{y} \quad 6z = 0.$$

En la figura 4.18 se muestra el primer plano.

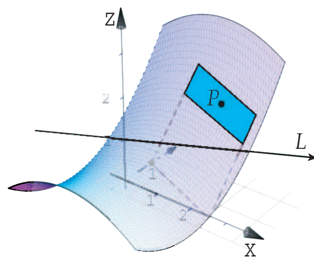


Figura 4.18 Recta y plano tangente.

6. Consideremos la superficie S de ecuación $z = x^2 + y^2$. Encuentre los puntos $P = (a,b,c) \in S$ tal que el plano tangente en P contenga los puntos $Q = (1,0,0)$ y $R = (0,1,0)$. Los planos tangentes son

   Solución.

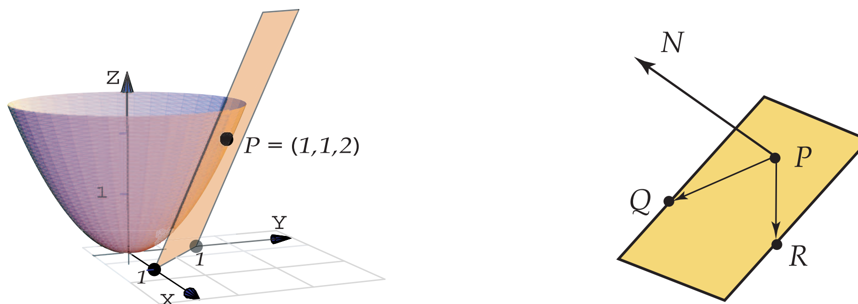


Figura 4.19 Plano tangente en P.

Un punto obvio es $P=(0,0,0)$ pues el plano tangente en este punto, el plano xy, contiene a los puntos Q,R. Busquemos otros puntos. El plano tangente en $P=(x,y,z)$ debe contener los puntos P,Q y R por lo que un vector normal a este plano es $N=(Q-P)\times(R-P)$. Como sabemos, otro vector normal a este plano es $\nabla G(P)$. Así, tenemos el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla G(P) & = & \lambda(Q-P)\times(R-P)=(z,z,1-x-y) \\ & & \\ z & = & x^2+y^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x & = & \lambda z & (1) \\ 2y & = & \lambda z & (2) \\ -1 & = & \lambda(1-x-y) & (3) \\ z & = & x^2+y^2 & (4) \end{array}\right.$$

De (1) y (2) tenemos $x=y$ y el sistema se re-escribe como

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x & = & \lambda z & (5) \\ \lambda-2\lambda x & = & -1 & (6) \\ z & = & 2x^2 & (7) \end{array}\right.$$

De (5) y (7) tenemos $2x-2\lambda x^2=0 \Longrightarrow (2x(1-\lambda x)=0 \Longrightarrow x=0$ o $\lambda x=1$.

• Si $x=0$ tenemos el punto $P=(0,0,0)$.

• Si $\lambda x=1$, sustituimos en la ecuación (6) y obtenemos $\lambda=1$ por lo que, usando nuevamente (6), $x=1$. Así obtenemos la segunda solución: $P=(1,1,2)$.

EJERCICIOS

4.1 Sea $f(x,y)=4-x^2-y^2$ la ecuación de una superficie S.

a) Determine el punto $P=(a,b)$ para el cual la derivada direccional de f en P es $\sqrt{3}$ en dirección de $\overrightarrow{u}=(-1,2)$ y $\sqrt{2}$ en la dirección de $\overrightarrow{v}=(1,1)$.

Respuesta. $P=\left(\dfrac{\sqrt{15}-4}{6},\dfrac{4-\sqrt{15}}{6}-1\right)$

b) Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $(1,-1,2)$.

Respuesta. $2x-2y+z=6$.

4.2 Determine la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva C, en el punto P dado, sabiendo que C se obtiene al intersecar la superficie S con el plano Π indicado, en cada uno de los siguientes casos:

a) $S_1:\ x^3+y^3+xyz-6=0,\ \Pi_1: y=2,\ P=(1,2,1)$.

b) $S_2: \; 36x^2 - 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0, \; \Pi_2 : z = -3, \; P = (1, 2, -3)$

c) $S_3: \; z = 4 - x^2 - y^2, \; \Pi_3: \; x + y + z = 2, \; P = (0, -1, 3).$

Respuesta: $L: \; (x, y, z) = P + t(-3, 1, 2), \; t \in \mathbb{R}.$
Ayuda: la ecuación vectorial de la recta tangente es $(x, y, z) = P + t \, \overrightarrow{v}$ donde $\overrightarrow{v}$ debe ser perpendicular a cualquier vector normal N_1 a S en P, tanto como a cualquier vector normal N_2 del plano Π. En la figura que sigue se muestra la superficie S_3, el plano Π_3 y la recta tangente L, en P.

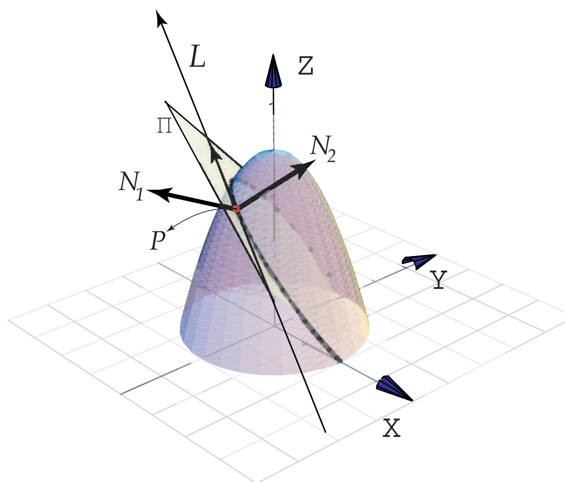


Figura 4.20

Capítulo 5

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

5.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Análogamente al cálculo en una variable, los extremos *locales* de una función de varias variables son puntos donde la función alcanza un máximo o un mínimo en un pequeño entorno de este punto. Si la función está definida en una región R, los extremos *globales* son los puntos donde la función toma valores máximos o mínimos, en cualquier parte de la región en consideración. En esta sección estudiaremos el caso de funciones en dos variables.

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas parciales es al cálculo de valores extremos, como estudiaremos en seguida.

Definición 5.1 (Extremos locales) *Una función de dos variables* $f: H \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tiene un máximo local en* $(a,b) \in D$ *si* $f(x,y) \leq f(a,b)$ *para todos los puntos* (x,y) *en algún entorno con centro* (a,b). *El número* $f(a,b)$ *se llama valor máximo local. Si* $f(x,y) \geq f(a,b)$ *para todo punto* (x,y) *en dicho entorno, entonces* $f(a,b)$ *es un mínimo local.*

Observación: Si las desigualdades de la definición anterior se cumplen para todos los puntos (x,y) en el dominio de f, entonces f tiene un máximo absoluto (o mínimo absoluto) en (a,b).

La figura 5.1 siguiente ilustra los conceptos de máximo y mínimo, respectivamente.

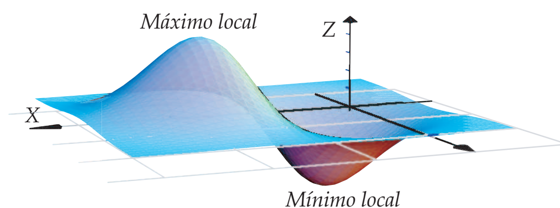


Figura 5.1 Máximos y mínimos

Observe que si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables y tiene un extremo en el punto $P = (a,b)$ entonces el plano tangente a la superficie en el punto P es paralelo al plano xy (figura 5.1), esto quiere decir que cualquiera de sus vectores normales es paralelo al vector $\overrightarrow{u} = (0,0,1)$ y puesto que, en este caso, un vector normal del plano tangente es

$$\overrightarrow{n} = \left(-\frac{\partial f(P)}{\partial x},\, -\frac{\partial f(P)}{\partial y},\, 1\right)$$

concluimos que $\nabla f(P) = 0$, es decir, en P las derivadas parciales se anulan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(P)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f(P)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

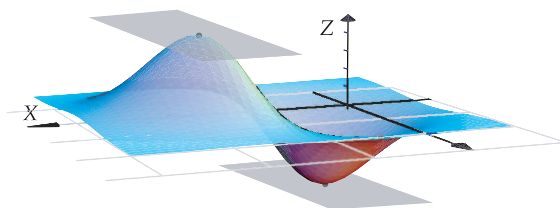


Figura 5.2 Las derivadas parciales se anulan en los extremos.

Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 5.1 (Condición necesaria para extremos) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que en $P = (a,b) \in D$, f tiene un extremo local (máximo o mínimo), entonces*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(P)}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial f(P)}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Los puntos P en donde $\nabla f(P) = 0$ se conocen como *puntos críticos.*

Definición 5.2 (Puntos críticos) *Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $P = (a,b) \in D$, entonces si $\nabla f(P) = 0$ o $\nabla f(P)$ no existe, decimos que P es un punto crítico o punto estacionario.*

Observación: El teorema anterior establece que si f tiene un extremo local en (a,b) entonces (a,b) es un punto crítico de f. Y al igual que sucede en una variable, no todos los puntos críticos son extremos locales.

■ **EJEMPLO 5.1**

Sea $f(x,y) = 6xy - 2x^2y - 3xy^2$. Calcule los puntos críticos de f.

Solución.

Igualando el gradiente a cero obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 6y - 4xy - 3y^2 = 0 \quad (1)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6x - 2x^2 - 6xy = 0 \quad (2)\end{aligned}$$

De la ecuación (1) tenemos que

$$6y - 4xy - 3y^2 = 0 \Longrightarrow y(6 - 4x - 3y) = 0$$

entonces

$$y = 0 \qquad \text{ó} \qquad y = \frac{6-4x}{3}$$

Si $y = 0$, al sustituir en la ecuación (2) tenemos que

$$y = 0 \Longrightarrow 6x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 3$$

Y así $(0,0),(3,0)$ son puntos críticos.

Por otro lado, si $y = \dfrac{6-4x}{3}$ al sustituir en la ecuación (2) tenemos que

$$y = \frac{6-4x}{3} \Longrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1$$

Y así $(0,2), \left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ también son puntos críticos. Finalmente, los puntos críticos son

$$\left\{(0,0),\,(3,0),\,(0,2),\,\left(1,\frac{2}{3}\right)\right\}$$

■ **EJEMPLO 5.2**

Encontrar y analizar los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 7$.

Solución.

Para hallar los puntos críticos necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x-2 & = & 0 \\ 2y-4 & = & 0 \end{cases}$$

Despejando obtenemos que en $(1,2)$, f tiene un punto crítico.

Para analizar el comportamiento de f cerca de este punto podemos construir una tabla de valores como la siguiente

$x \diagdown y$	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
0.8	2.08	2.05	2.04	2.05	2.08
0.9	2.05	2.02	2.01	2.02	2.05
1.0	2.04	2.01	**2**	2.01	2.04
1.1	2.05	2.02	2.01	2.02	2.05
1.2	2.08	2.05	2.04	2.05	2.08

aquí $f(0.8,\, 1.8) = 2.08$, etc.

Esta tabla nos sugiere que en el punto $(1,2)$, f alcanza un mínimo local pues en los puntos de prueba, $f(1,2) = 2$ esta siempre por debajo de los otros valores. Se puede verificar esto completando cuadrados

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 7 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2$$

Con lo cual la gráfica de $f(x,y)$ es un paraboloide con vértice en $(1,2,2)$, como se muestra en la figura 5.2 siguiente.

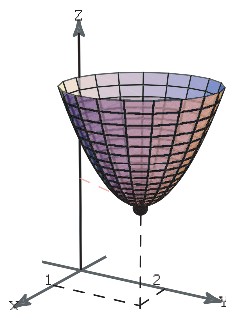


Figura 5.3 Mínimo local.

Una vez encontrados los puntos críticos, necesitamos de un criterio que nos permita clasificarlos como máximos, mínimos o puntos de silla, con este propósito se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 5.2 *Suponga que $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ derivadas parciales de segundo orden continuas en un entorno con centro en $P = (a,b)$. Si $f_x(a,b) = 0$ y $f_y(a,b) = 0$ (es decir, P es un punto crítico de f), entonces si*

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y),$$

- *Si $H(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$, entonces $f(a,b)$ es un mínimo local.*
- *Si $H(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$, entonces $f(a,b)$ es un máximo local.*
- *Si $H(a,b) < 0$, entonces $f(a,b)$ no es un extremo.*

donde

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}\right)^2$$

Observación: Cuando $H(a,b) < 0$ decimos que (a,b) es un *punto de silla*. Si $H(a,b) = 0$, el teorema no proporciona ninguna información; la función podría tener un máximo, un mínimo o un punto de silla en el punto (a,b). Para poder clasificarlo necesitamos aplicar otro criterio. Este teorema solo da condiciones suficientes, esto quiere decir que un punto en el cual el criterio falle, no decide; podría existir un extremo local.

■ **EJEMPLO 5.3**

Clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = 6xy - 2x^2y - 3xy^2$$

Solución.

En el ejemplo 1, calculamos los puntos críticos

$$(0,0),\ (0,2),\ (3,0),\ \left(1,\frac{2}{3}\right)$$

La función H está dada por

$$H(x,y) = 24xy + 4x + 6y - 6$$

Evaluando en cada punto tenemos

- $H(0,0) = -6$, con lo cual el punto $(0,0)$ es un punto de silla.
- $H(0,2) = 6$ y $f_{xx}(0,0) = -8$, entonces $f(0,2) = 0$ es un máximo local.
- $H(3,0) = 6$ y $f_{xx}(3,0) = 0$, entonces el criterio no decide.
- $H(1,\frac{2}{3}) = 18$ y $f_{xx}\left(2,\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$, entonces $f\left(1,\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ es un máximo local.

En la figura 5.4 se muestra la gráfica de la función $f(x,y)$, observe que la gráfica tiene la forma de una silla de montar; de aquí el nombre de punto silla para el punto $(0,0)$.

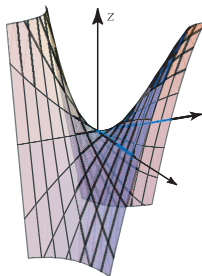


Figura 5.4 Punto de silla en $(0,0)$

■ EJEMPLO 5.4

Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Solución.

Primero calculamos los puntos críticos

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 + 4y - 4x = 0 \qquad (1) \\ f_y &= 4y^3 - 4y + 4x = 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro obtenemos $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \Longrightarrow x = -y$.

> Note que $(x^2 - xy + y^2) \neq 0$ si $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ pues si $x^2 - xy + y^2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4y^2}}{2}$, es decir el discriminante es < 0 excepto si $y = 0$.

Sustituyendo en la ecuación (1) queda $4x^3 - 4x - 4x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 2) = 0$ con lo cual obtenemos los puntos críticos

$$(0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

> Observe que si al sustituir en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos identidades, entonces tendríamos infinitas soluciones. Aquí este no es el caso.

La función D está dada por $H(x,y) = (12x^2-4)(12y^2-4)-(4)^2$
Evaluando en cada punto tenemos

- $H(0,0) = 0$, el criterio no proporciona información aunque la gráfica (5.5) nos indica que se trata de un punto de silla.

- $H(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 384 > 0$, y $f_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 20 > 0$, con lo que f alcanza un mínimo local en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
- $H(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 384 > 0$, y $f_{xx}(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 20 > 0$, con lo que f alcanza un mínimo local en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

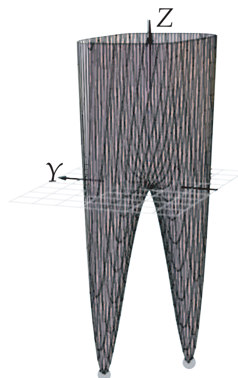


Figura 5.5 $f(x,y) = x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

■ **EJEMPLO 5.5**

Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2$.

Solución.

Primero calculamos los puntos críticos

$$\begin{aligned} f_x &= 2x = 0 \quad (1) \\ f_y &= 0 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(0,y)$. Así que tenemos un número infinito de puntos críticos. La función H está dada por $H(x,y) = (2)(0)-(0)^2 = 0$ así que este criterio no da información aunque, de acuerdo a la gráfica (5.6), se trata de puntos donde f alcanza mínimos locales.

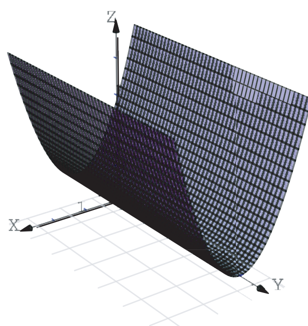


Figura 5.6 $f(x,y) = x^2$.

En el siguiente ejemplo vamos a usar el hecho de que si $g(x,y)$ no se anula, $\sqrt{g(x,y)}$ y $g(x,y)$ tienen los mismos puntos críticos (¿porqué?).

■ **EJEMPLO 5.6**

Hallar el punto del paraboloide $z = x^2 + y^2 + 2$ más cercano del punto $P = (2,2,2)$.

Solución.

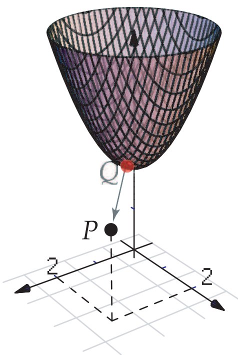


Figura 5.7 Punto P y el paraboloide.

Todo punto que esta sobre el paraboloide es de la forma $Q = (x,y,x^2 + y^2 + 2)$, entonces su distancia al punto $(2,2,1)$ está dada por

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (x^2 + y^2)^2}$$

así que basta con encontrar los puntos críticos de $\overline{d}(P,Q)=(x-2)^2+(y-2)^2+(x^2+y^2)^2$.

$$\begin{aligned}
\overline{d} &= (x-2)^2+(y-2)^2+(x^2+y^2)^2 && (1)\\
\frac{\partial \overline{d}}{\partial x} &= 2(x-2)+4x(x^2+y^2)=0 && (2)\\
\frac{\partial \overline{d}}{\partial y} &= 2(y-2)+4y(x^2+y^2)=0 && (3)
\end{aligned}$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones (2) y (3) obtenemos

$2x-2y+(x^2+y^2)(4x-4y)=0 \implies (x-y)(1+2(x^2+y^2))=0 \implies x-y=0$, es decir $x=y$.

En este caso, la geometría del problema nos indica que no hay un número infinito de soluciones, sino *una sola solución.* Podemos encontrar esta única solución sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones (2) o (3); obtenemos

$$4x^3+x-2\,=\,0$$

y al resolverla obtenemos que $x=0.689\ldots$. Y así, el punto que buscamos es $(0.689\ldots,0.689\ldots,2.475\ldots)$. Observe que en este caso no es necesario usar el criterio de clasificación, claramente el punto que encontramos se trata de un mínimo.

■ **EJEMPLO 5.7**

Calcule el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x+2y+3z=6$.

Solución.

La caja rectangular es como la que se muestra en la figura 5.7 siguiente.

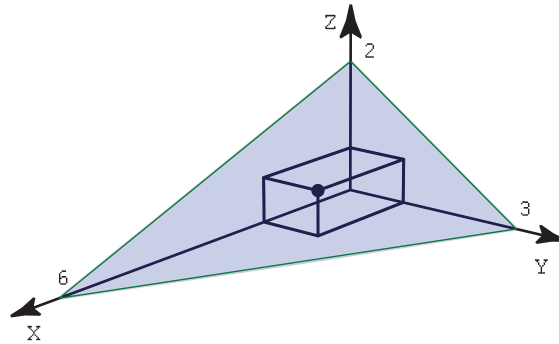


Figura 5.8 Caja de volumen máximo.

y como vimos en el ejemplo 1, el volumen es máximo cuando $x = 2, y = 1$ y $z = \dfrac{2}{3}$, las cuales son las dimensiones de la caja. Por otro lado, el volumen máximo es de $\dfrac{4}{3}$.

■ **EJEMPLO 5.8**

Sea $z = xy + \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}$ la ecuación de una superficie (con a y b constantes). Si $P = (1,2)$ es un punto crítico de z, determine si en P la función alcanza un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

Solución.

Como $P = (1,2)$ es punto crítico, las derivadas parciales de z se anulan en P, es decir

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left.\left(y - \dfrac{a}{x^2}\right)\right|_{(1,2)} = 0 \\ \left.\left(x - \dfrac{b}{y^2}\right)\right|_{(1,2)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2 - \dfrac{a}{1^2} = 0 \\ 1 - \dfrac{b}{2^2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$a = 2$ y $b = 4$

Ahora, $H(x,y) = \left(\dfrac{2a}{x^3}\right)\left(\dfrac{2b}{y^3}\right) - 1^2 = \left(\dfrac{4}{x^3}\right)\left(\dfrac{8}{y^3}\right) - 1.$

• $H(1,2) = 3$ y $z_{xx}(1,2) = 4 > 0$. Luego, en el punto $P = (2,1)$ z alcanza un mínimo relativo.

■ **EJEMPLO 5.9**

Calcular y clasificar los puntos críticos de $z = 4x^2 - xy + y^2$.

Solución.

• Puntos críticos:

resolvemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lccl} z_x = & 8x - y & = & 0 \implies 8x = y \\ z_y = & -x + 2y & = & 0 \implies 2y = x \end{array} \right. \qquad \implies 16y = y \implies y = 0$$

así, el único punto crítico es $P = (0,0,0)$.

• Test:

$\star\ z_{xx} = 8$
$\star\ z_{yy} = 2$
$\star\ z_{yx} = -1$

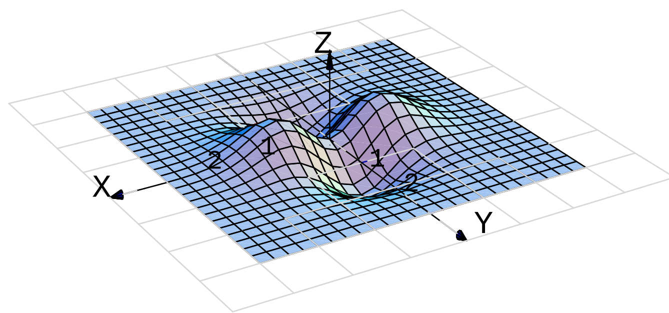
$H(P) = 8 \cdot 2 \cdot -(-1)^2 = 15 > 0$ y puesto que $z_{xx} = 8 > 0$, entonces P=(0,0,0) es un mínimo relativo.

■ EJEMPLO 5.10

Sea $z = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$.

1. Determine sus máximos y mínimos relativos.

2. Determine el máximo absoluto de z si $0 \leq x \leq 1$ y $y = 0$.



Solución.

- Puntos críticos:

El sistema es $\begin{cases} z_x = & 2xe^{-x^2-y^2} - 2xe^{-x^2-y^2}(x^2-y^2) & = & 0 \\ z_y = & -2ye^{-x^2-y^2} - 2ye^{-x^2-y^2}(x^2-y^2) & = & 0 \end{cases}$

Simplificando queda $\begin{cases} e^{-x^2-y^2}2x(1-x^2+y^2) & = & 0 \\ -e^{-x^2-y^2}2y(1+x^2-y^2) & = & 0 \end{cases}$

como $e^{-x^2-y^2} > 0$ entonces nos queda el sistema

$$\begin{cases} 2x(1-x^2+y^2) & = & 0 \\ -2y(1+x^2-y^2) & = & 0 \end{cases}$$

Tenemos 4 casos:

CASO 1.) $2x = 0$ y $2y = 0$. Entonces $x = 0$ y $y = 0$.

CASO 2.) $2x = 0$ y $(1+x^2-y^2) = 0$. Entonces $x = 0$ y $y = \pm 1$

CASO 3.) $-2y = 0$ y $(1-x^2+y^2) = 0$. Entonces $y = 0$ y $x = \pm 1$

CASO 4.) $(1-x^2+y^2) = 0$ y $(1+x^2-y^2) = 0$. Este caso es inconsistente pues quedaría

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad x^2 - y^2 = -1$$

- Test:

Calculamos $H(P)$ y evaluamos cada uno de los 5 puntos.

$\star\ z_{xx} = 2e^{-x^2-y^2}(2x^4 - x^2(2y^2+5) + y^2 + 1)$

$\star\ z_{yy} = 2e^{-x^2-y^2}(x^2(2y^2-1) - 2y^4 + 5y^2 - 1)$

$\star\ z_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)$

Luego tenemos:

⋆ Para $P = (0,0,0)$, $H(P) = -4$. P es un punto de silla.

⋆ Para $(0,1,-1/e)$, $H(P) = 2.165 > 0$ $z_{xx} = 1.47 < 0$. Se trata de un mínimo relativo.

⋆ Para $(0,-1,-1/e)$, $H(P) = 2.165 > 0$ $z_{xx} = 1.47 < 0$. Se trata de un mínimo relativo.

⋆ Para $(1,0,1/e)$, $H(P) = 2.165 > 0$ $z_{xx} = -1.47 < 0$. Se trata de un máximo relativo.

⋆ Para $(-1,0,-1/e)$, $H(P) = 2.165 > 0$ $z_{xx} = -1.47 < 0$. Se trata de un máximo relativo.

■ **EJEMPLO 5.11**

Cuales deben ser las dimensiones de un envase para leche de forma rectangular, volumen de $512\,cm^3$ y costo mínimo, si el material de los lados de la caja cuestan 10 colones el centímetro cuadrado y el material de la tapa y el fondo cuestan 20 colones el centímetro cuadrado.

Solución.

Suponga que las dimensiones de la caja son $x\,cm$ de ancho, $y\,cms$ de largo y $z\,cms$ de alto, entonces su volumen es :

$$512 = xyz \Longrightarrow z = \frac{512}{xy}$$

Por otro lado, el costo total esta dado por $c(x,y,z) = 20xz + 20yz + 40xy$

De donde obtenemos que

$$c(x,y) = \frac{10240}{x} + \frac{10240}{y} + 40xy$$

Calculando las derivadas parciales, formamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial x} = 40y - \dfrac{10240}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} = 40y - \dfrac{10240}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Y resolviendo obtenemos que $x = 1$ o $y = 256$. Para comprobar que se trata de un mínimo aplicamos el criterio de la segunda derivada

$$c_{xx} = \frac{20480}{x^3}$$

$$H(x,y) = \frac{20480^2}{x^3 y^3} - 40$$

y al evaluar en el punto $(1,256)$, tenemos que

$$c_{xx} = 20480 > 0$$

$$H(1,256) = 6360 > 0$$

Con lo cual las dimensiones de la caja con costo mínimo son $x = 1$, $y = 256$ y $z = 2$.

EJERCICIOS

5.1 Si $z = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 15$, encuentre y clasifique los puntos críticos de z.

Respuesta: $(3,-1,1)$ es un mínimo relativo.

5.2 Si $z = x^3 + y^3$, encuentre y clasifique los puntos críticos de z.

Respuesta: $(0,0)$ no es un extremo.

5.3 Si $z = x^3 + y^3 - 3xy$, encuentre y clasifique los puntos críticos de z.

Respuesta: $(0,0)$ no es un extremo, $(1,1)$ es un mínimo.

5.4 Para las siguientes funciones, calcule los puntos críticos y clasifíquelos.

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

b) $f(x,y) = (x-y)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$

c) $f(x,y) = \dfrac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$

d) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

e) $f(x,y) = e^x \cos y$

5.5 Encuentre los puntos P de la superficie de ecuación $x^2y^2 = z + 1$, que están más cercanos al origen.

5.6 Encuentre el volumen de la máxima caja, de base rectángular, que tenga tres caras en los planos $x = 0, y = 0, z = 0$, en el primer octante, y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$ (haga un dibujo).

5.7 Resuelva el ejercicio anterior si el plano tiene ecuación $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, con a,b,c números positivos.

5.8 Encuentre las dimensiones da la caja rectángular de máximo volumen, si el área de su superficie total debe ser de $64cm^2$

5.2 EXTREMOS CON RESTRICCIONES: MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Supóngase que queremos hallar los máximos y los mínimos relativos de $z=f(x,y)$ sujeto a la restricción $g(x,y)=0$. Esto significa que la función $f(x,y)$ solo podrá ser evaluada en los puntos (x,y) que estén en la curva de nivel $g(x,y)=0$, es decir $f(x,y)$ está restringida (o sujeta) a $g(x,y)=0$. Una manera de resolver este problema se puede obtener con un análisis geométrico de la situación: si dibujamos las curvas de nivel de z, o sea las curvas $f(x,y)=k$, los puntos (x,y) que cumplen la restricción son los puntos de intersección entre estas curvas de nivel y la curva de nivel $g(x,y)=0$. Desplazándose sobre las curvas $f(x,y)=k$, en la dirección en que z crece, se puede detectar el más grande valor de z restringida a $g(x,y)=0$. Si la curva de nivel de z donde se alcanza el máximo valor, interseca a $g(x,y)=0$ en $P=(a,b)$ entonces en P, estas dos curvas son tangentes (siempre y cuando el punto P no sea un punto terminal de g).

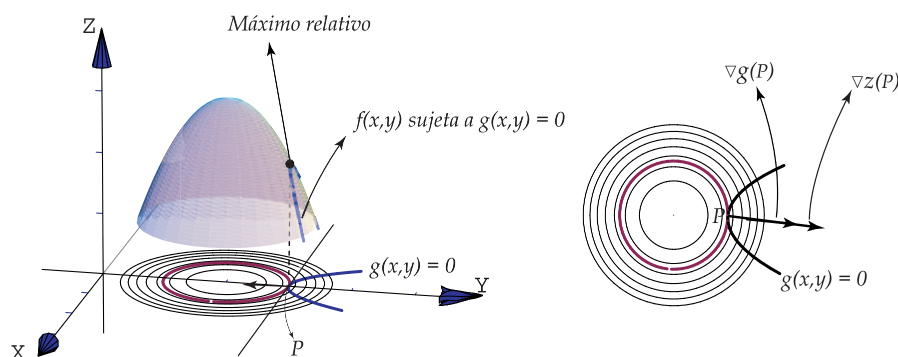


Figura 5.9

De manera similar, Desplazándose sobre las curvas $f(x,y)=k$, en la dirección en que z decrece, se puede detectar el más pequeño valor de z restringida a $g(x,y)=0$. Si la curva de nivel de z donde se alcanza el mínimo valor interseca a $g(x,y)=0$ en $P=(a,b)$ entonces en P estas dos curvas son tangentes (siempre y cuando el punto P no sea un punto terminal de g).

Formalmente, si $P=(a,b,c)$ es un punto crítico de $z=f(x,y)$ restringida a la curva $g(x,y)=0$, entonces la curva de nivel $f(x,y)=c$ es tangente a la curva $g(x,y)=0$ en el punto (a,b) y, por lo tanto el vector $\nabla g(a,b)$ es paralelo al vector $\Delta z(P)$, es decir

$$\Delta z(P) = \lambda \Delta g(P)$$

o lo que es lo mismo,

$$\Delta z(P) - \lambda \Delta g(P) = 0$$

Por lo tanto, los extremos de $z = f(x,y)$ restringida a $g(x,y) = 0$ son los extremos de la función

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

A λ se le llama multiplicador (de Lagrange).

- Para que P sea un extremo de f sujeto a la condición $g(x,y) = 0$ es *necesario* que se cumpla $\Delta z(P) = \lambda \Delta g(P)$ pero no suficiente. Esto nos dice que las soluciones del sistema $\Delta z(P) - \lambda \Delta g(P) = 0$ son solo posibles extremos.

Método de los multiplicadores de Lagrange:

- Para minimizar o maximizar $f(x,y)$ sujeta a la condición $g(x,y) = 0$, minimice o maximice $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$.

  Para hallar los puntos críticos de $L(x,y,\lambda)$ se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{cases}$$

- Para determinar si los puntos críticos son máximos, mínimos o no son ni máximos ni mínimos, se debe recurrir a criterios que no se cubren en este curso. En lo que sigue se indica si lo que vamos a encontrar son máximos o mínimos o la naturaleza de los problemas nos indican que debemos esperar.

■ **EJEMPLO 5.12**

Maximizar $f(x,y) = 2y - x$ sujeto a $y = sen x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Solución.

$F(x,y,\lambda) = 2y - x - \lambda(y - \operatorname{sen} x)$

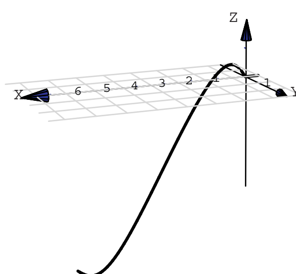
• Puntos crí ticos:

$$\begin{cases} F_x = -1+\lambda\cos x &=& 0 \\ F_y = 2-\lambda &=& 0 \\ F_\lambda = -y+\operatorname{sen} x &=& 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda = 2,\ \cos x = \frac{1}{2}$ o sea, $x = \frac{\pi}{3},\ \ x = \frac{5\pi}{3}.$

• Test:

Para determinar la naturaleza de los puntos críticos, recurrimos a un dibujo: los puntos de la superficie que cumplen la restricción están sobre una curva C: la curva de intersección entre el plano $z = 2y - x$ y la superficie $y = \operatorname{sen} x$.



Como se observa, el punto crítico $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0.6848532...\right)$ El otro punto corresponde a un mínimo local. es un máximo local.

■ **EJEMPLO 5.13**

Encontrar el máximo y el mínimo de $f(x,y) = x^2+y^2$ sujeto a $x^4+y^4 = 1$

Solución.

$F(x,y,\lambda) = x^2+y^2-\lambda(x^4+y^4-1)$

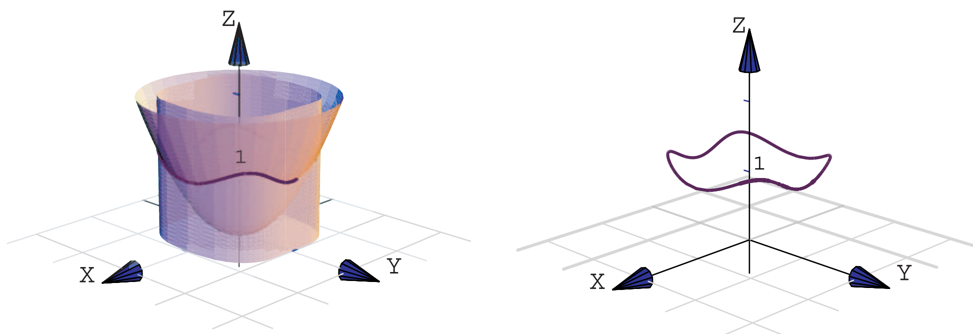
• Puntos críticos:

$$\begin{cases} F_x = 2x-\lambda 4x^3 = 2x(1-2\lambda x^2) &=& 0 \\ F_y = 2y-\lambda 4y^3 = 2y(1-2\lambda y^2) &=& 0 \\ F_\lambda = -x^4-y^4+1 &=& 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 0 \text{ o } x^2 = \frac{1}{2\lambda},\ \ y = 0 \text{ o } y^2 = \frac{1}{2\lambda}.$$

Sustituyendo estos casos en la última ecuación, obtenemos los puntos

$$\left(\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}\right),\quad (0,\pm 1),\quad (\pm 1, 0).$$

Para clasificar los puntos, dibujamos la curva de intersección entre la superficie $z = x^2 + y^2$ y la superficie generada por la curva $x^4 + y^4 = 1$.



así , tenemos 4 máximos, $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ y 4 mínimos, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$

EJERCICIOS

5.9 Obtener el máximo de $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeta a $x + y = 3$

5.10 Minimizar $C(r,h) = 2kr^2 + 2.5(2krh)$ sujeta a la restricción $Kr^2h = 1000$.

5.11 Calcule los puntos críticos de $z = x^2y^2$ sujeta a la condición $x^2 + y^2 = 1$.

Capítulo 6

INTEGRAL DOBLE E INTEGRAL TRIPLE. CAMBIO DE VARIABLE.

6.1 PROYECCIONES SOBRE LOS PLANOS COORDENADOS.

Más adelante, cuando queramos calcular integrales dobles, triples o de superficie, será necesario proyectar ortogonalmente una superficie sobre alguno de los planos coordenados.

Básicamente, las proyecciones son transformaciones lineales que asignan a cada punto $P=(x,y,z)$ sobre el sólido S (o sobre la superficies S) un punto Q , que corresponde a su proyección ortogonal sobre el plano sobre el cual estamos proyectando.

■ **EJEMPLO 6.1**

Dibuje la proyección sobre cada uno de los planos coordenados xy, xz, yz, de la superficie S.

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}\mid x=y,\ 1\leq x\leq 2,\ 1\leq y\leq 2,\ 1\leq z\leq 2\}$$

Solución.

En este caso la superficie S es un rectángulo en el espacio. Las proyecciones resultan sencillas como se muestra en la figura 7.1. Observe que la proyección sobre el plano xy es un segmento de línea.

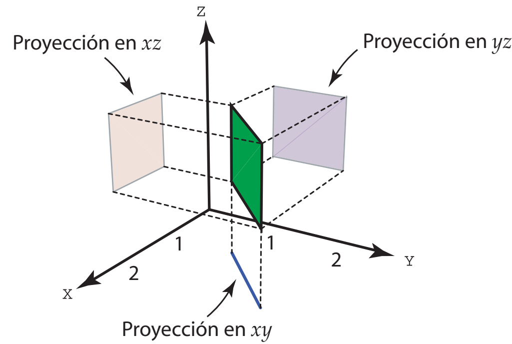


Figura 6.1 Proyecciones del rectángulo S

■ EJEMPLO 6.2

Consideremos el sólido Q limitado por las superficies $z = 4 - x^2$, $y + z = 5$ y los planos $x = y = z = 0$.

Dibuje la proyección del sólido Q sobre cada uno de los planos coordenados xy, xz, yz.

Solución.

El sólido Q y las proyecciones sobre los planos xz y yz son sencillas y se muestran en la figura (6.2),

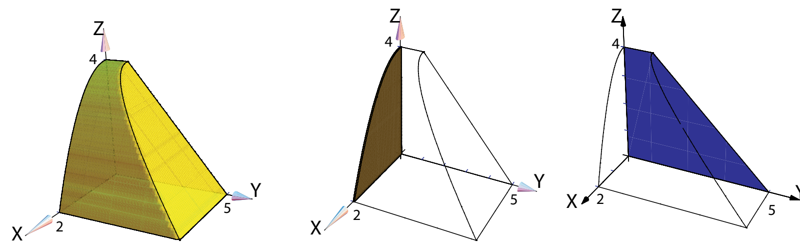


Figura 6.2 Proyecciones del sólido Q en xz y yz.

La proyección en el plano xy requiere el cálculo de la proyección de la curva de intersección entre la superficie $z = 4 - x^2$ y $z + y = 5$. Como la proyección de la curva debe quedar en términos de x e y, sustituimos $z = 4 - x^2$ (ya está despejada!) en la segunda ecuación: $4 - x^2 + y = 5$ o $y = 1 + x^2$. La proyección se ve en la figura (6.3).

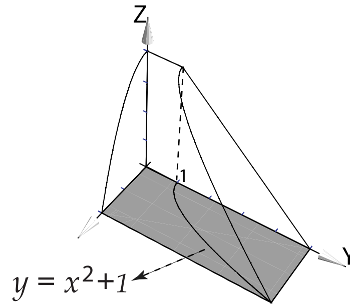


Figura 6.3 Proyección del sólido Q en xy y yz.

■ **EJEMPLO 6.3**

Proyectar sobre cada uno de los planos coordenados, el sólido Q limitado por las superficies

$$z = x^2 + y^2 + 1, \quad z = 2$$

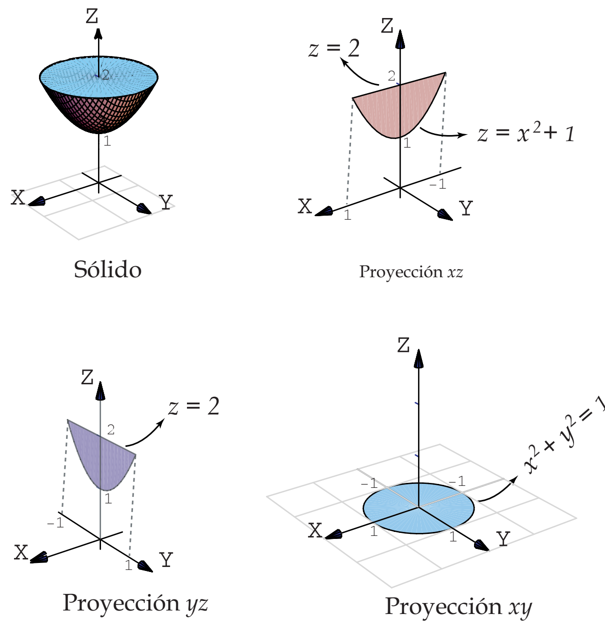


Figura 6.4 Sólido Q y sus proyecciones

Solución.

En la figura 7.2 se pueden observar el sólido Q y sus las proyecciones:

- En el plano yz la proyección esta limitada por las curvas $z = 2$ y $z = y^2 + 1$. La ecuación $z = y^2 + 1$ se obtiene al calcular la intersección entre el plano $x = 0$ y la

superficie $z = x^2 + y^2 + 1$.

- En el plano xz la proyección esta limitada por las curvas $z = 2$ y $z = x^2 + 1$. La ecuación $z = x^2 + 1$ se obtiene al calcular la intersección entre el plano $y = 0$ y la superficie $z = x^2 + y^2 + 1$.

- En el plano xy la proyección es el círculo y $x^2 + y^2 = 1$. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ se obtiene al calcular la intersección entre el plano $z = 0$ y la superficie $z = x^2 + y^2 + 1$.

■ **EJEMPLO 6.4**

Proyectar sobre cada uno de los planos coordenados, el sólido Q limitado por las superficies

$$z = 1 - x^2,\ x + y = 1,\ x = y = z = 0$$

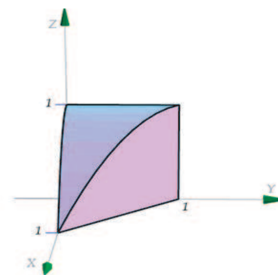


Figura 6.5 Sólido Q

Solución.

La proyección sobre el plano xz se muestra en la figura 6.6. La ecuación de la curva C_1 corresponde a $z = 1 - x^2$ con $x \in [0, 1]$.

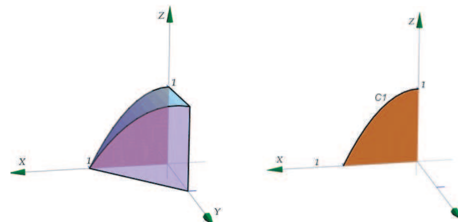
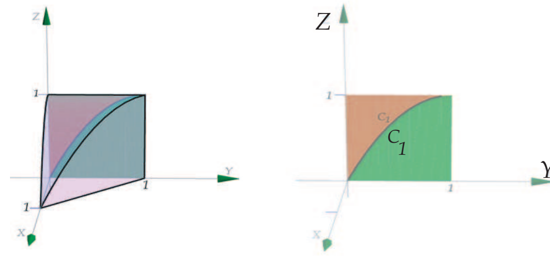


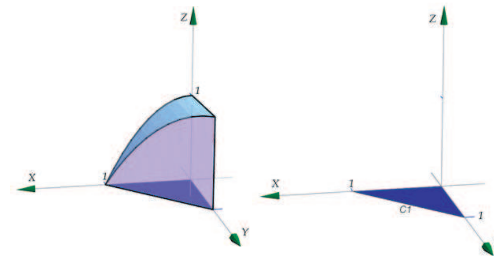
Figura 6.6 Proyección sobre xz



La proyección sobre el plano yz se muestra en la figura 6.7. Para hallar la ecuación de la curva C_1 observe que

Figura 6.7 Proyección sobre yz

$$z=1-x^2 \ \cap \ x+y=1 \implies z=1-(1-y)^2, \ y\in[0,1]$$



La proyección sobre el plano xy se muestra en la figura 6.8.

Figura 6.8 Proyección sobre xy

La ecuación de la curva C_1 corresponde a $y=1-x$ con $x\in[0,1]$.

6.2 INTEGRAL DOBLE.

Sea $z=f(x,y)$ integrable en una región R.

- Si $R=\{(x,y)\,:\,g_1(x)\leq y\leq g_2(x),\,a\leq x\leq b\}$, entonces

$$\int\int_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx=\int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

- Si $R=\{(x,y)\,:\,h_1(y)\leq x\leq h_2(y),\,p\leq y\leq q\}$, entonces

$$\int\int_R f(x,y)\,dA=\int_p^q\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_p^q\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

EJEMPLO 6.5

Sea R la región de la figura 6.9. Vamos a calcular $\int\int_R xy\,dA$ usando el orden de integración "$dy\,dx$" y el orden de integración "$dx\,dy$."
Observe que R se puede describir como

$R\,:\,0 \leq x \leq 1,\;\; x^2 \leq y \leq x$

$R\,:\,0 \leq y \leq 1,\;\; y \leq x \leq \sqrt{y}.$

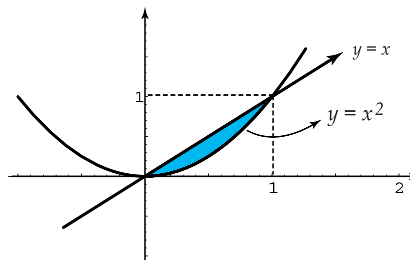


Figura 6.9 Región R

• Integrando en le orden "$dy\,dx$"

$$\begin{aligned}\int\int_R xy\,dA &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x xy\,dy\right] dx\\ &= \int_0^1 \left[x\,\frac{y^2}{2}\bigg|_{x^2}^{x}\right] dx\\ &= \int_0^1 \left[x\,\frac{x^2}{2} - x\,\frac{x^4}{2}\right] dx = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

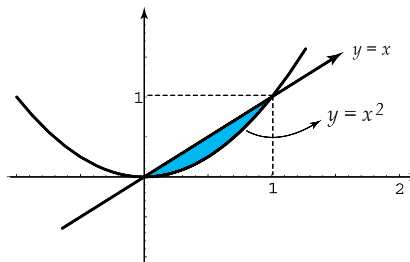


Figura 6.10 Integrando en le orden "$dy\,dx$"

• Integrando en le orden "$dx\,dy$"

$$\begin{aligned}\int\int_R xy\,dA &= \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} xy\,dx\right] dy\\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\,y\bigg|_y^{\sqrt{y}}\right] dy\\ &= \int_0^1 \left[\frac{y}{2}\,y - \frac{y^2}{2}\,y\right] dy = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

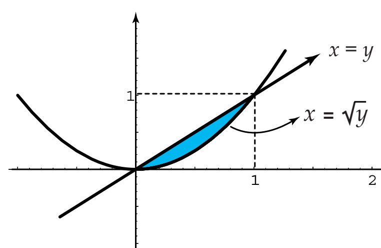


Figura 6.11 Integrando en le orden "$dx\,dy$"

En el ejemplo que sigue se muestra como el número de regiones de integración puede variar, de acuerdo a la elección del orden de integración.

EJEMPLO 6.6

Considere la integral $I = \int\int_R x^2 + y^2\, dA$, donde R es la región de la figura 6.12. Vamos a calcular esta integral doble, usando el orden de integración "$dy\,dx$" y el orden de integración "$dx\,dy$."

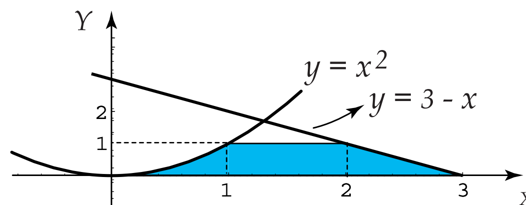


Figura 6.12 Región R

En la figura 6.13 aparece a región R vista con la variable x como variable independiente y luego, la figura 6.14, con la variable y como variable independiente.

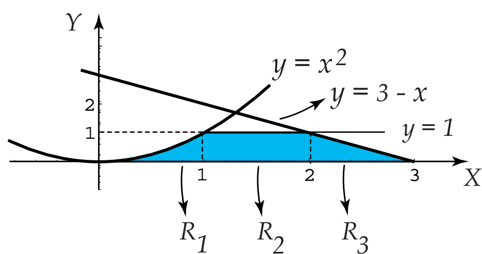


Figura 6.13 Región R con x como variable independiente

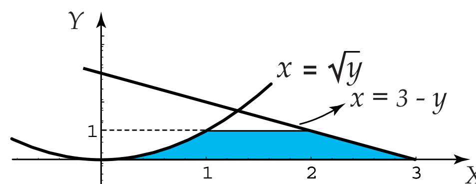


Figura 6.14 Región R con y como variable independiente

• Orden "$dy\,dx$": en este caso $R = R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} x^2 + y^2\, dy\right] dx + \int_1^2 \left[\int_0^1 x^2 + y^2\, dy\right] dx + \int_2^3 \left[\int_0^{3-x} x^2 + y^2\, dy\right] dx \\
&= \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{x^2} dx + \int_1^2 x^2 y + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{1} dx + \int_2^3 x^2 y + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{3-x} dx \\
&= \int_0^1 x^4 + \frac{x^6}{3}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{3} + x^2\, dx + \int_2^3 9 - 9x + 6x^2 - \frac{4x^3}{3}\, dx \\
&= \frac{1207}{210}
\end{aligned}$$

• Orden "$dx\,dy$"

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{3-y} x^2+y^2\,dx\right] dy \\
&= \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{y}}^{3-y}\right] dy \\
&= \int_0^1 9-9y-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}+6y^2-y^{\frac{5}{2}}-\frac{4y^3}{3}\,dy \\
&= \frac{1207}{210}
\end{aligned}
$$

■ **EJEMPLO 6.7**

Considere la integral

$$I=\int_0^1\int_{-x^3}^{x} f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^4\int_{x-2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$$

Dibuje la región de integración y re-escriba la integral en el orden "$dx\,dy$."

Solución.

En la figura 6.15 aparece la región de integración. Si y es la variable independiente, $R = R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3$.

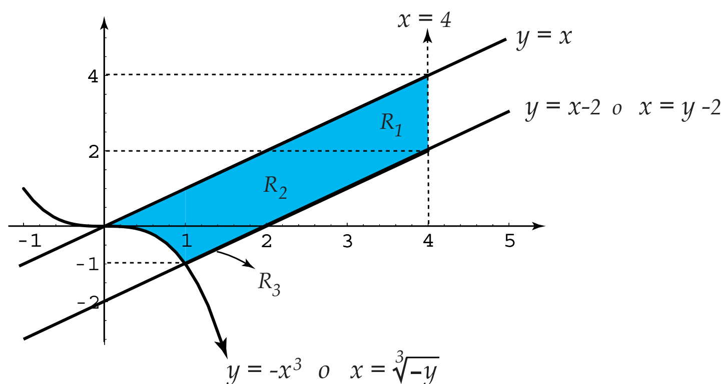


Figura 6.15 Región R con y como variable independiente

Orden "$dx\,dy$"

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_R f(x,y)\,dA &= \int\!\!\int_{R_1} f(x,y)\,dA+\int\!\!\int_{R_2} f(x,y)\,dA+\int\!\!\int_{R_3} f(x,y)\,dA+\\ &= \int_2^4\int_y^4 f(x,y)\,dx\,dy+\int_0^2\int_y^{y-2} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{-1}^0\int_{-\sqrt[3]{y}}^{y-2} f(x,y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.8**

Sea $I=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\int_{4-4(x+2)^2}^{x+6} dy\,dx\;+\;\int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{x+6} dy\,dx.$

1. Dibuje la región de integración.
2. Plantear la integral o las integrales que corresponden a I invirtiendo el orden de integración.

Solución.

La región de integración es (figura 6.57).

$$\begin{cases} 4-4(x+2)^2\le y\le x+6 & \text{si} \quad -2\le x\le -1\\ x+1\le y\le x+6 & \text{si} \quad -1\le x\le 0\end{cases}$$

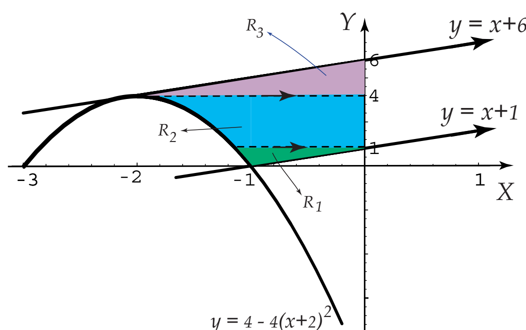


Figura 6.16 Región de integración.

Para integrar en el orden "$dx\,dy$" hay que partir la región en tres subregiones R_1, R_2, R_3.

$$\begin{cases} -2+\dfrac{\sqrt{4-y}}{2}\le x\le y-1 & \text{si} \quad 0\le y\le 1\\[2ex] -2+\dfrac{\sqrt{4-y}}{2}\le x\le 0 & \text{si} \quad 1\le y\le 4\\[2ex] y-6\le x\le 0 & \text{si} \quad 4\le y\le 6\end{cases}$$

Luego,

$$I = \int_0^1 \int_{-2+}^{y-1} \frac{\sqrt{4-y}}{2}\,dx\,dy \;+\; \int_1^4 \int_{-2+}^{0} \frac{\sqrt{4-y}}{2}\,dx\,dy \;+\; \int_4^6 \int_{y-6}^{0} dx\,dy$$

6.3 ÁREA Y VOLUMEN

- La medida A_R del área de una región R se puede calcular con la integral doble

$$A_R = \int\int_R 1\,dx\,dy = \int\int_R 1\,dy\,dx$$

- Sea $f(x,y) \geq 0$ y continua en una región cerrada R. Si V_Q es la medida del volumen del sólido Q que tiene a R como base y una altura de medida $f(x,y)$ en cada $(x,y) \in R$, entonces

$$V_Q = \int\int_R f(x,y)\,dA$$

- Si el sólido Q está limitado, sobre la región R, por dos superficies de ecuaciones $z = f(x,y)$ y $g(x,y)$ con $f(x,y) - g(x,y) \geq 0$ sobre R, entonces

$$V_Q = \int\int_R f(x,y) - g(x,y)\,dA$$

- Muchas veces es conveniente considerar como la región R la proyección del sólido sobre los planos xz o yz.

■ **EJEMPLO 6.9**

Sea Q el sólido limitado por las superficies

$$z = 1 - x^2,\; x + y = 1,\; x = y = z = 0$$

Calcule V_Q usando como región R cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos xy, yz, xz.

Solución.

• Cálculo de V_Q proyectando sobre el plano xz.

La proyección sobre el plano xz se muestra en la figura 6.17. La ecuación de la curva C_1 corresponde a $z = 1 - x^2$ con $x \in [0,1]$.

Desde el punto de vista del plano xz, el sólido esta limitado por las superficies $y = 1 - x$. y $y = 0$
Integrando en el orden "$dz\,dx$" queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} 1 - x \,-\, 0 \, dz\, dx \\ &= \int_0^1 (1-x)(1-x^2)\, dx \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

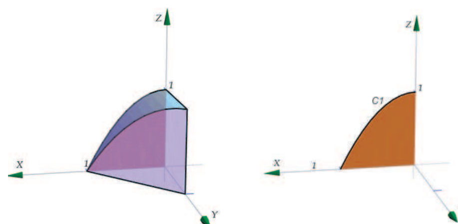


Figura 6.17 Proyección sobre xz

• Cálculo de V_Q proyectando sobre el plano yz.

La proyección sobre el plano yz se muestra en la figura 6.18. Para hallar la ecuación de la curva C_1 observe que

$$z = 1 - x^2 \bigcap x + y = 1 \implies z = 1 - (1-y)^2 = 2y - y^2, \; y \in [0,1]$$

La curva C_1 divide la región de integración en dos partes, la región R_1 y la región R_2.

Desde el punto de vista del plano yz, el sólido está limitado por las superricies

- $x = \sqrt{1-z}$ y $x = 0$ sobre R_1.
- $x = 1 - y$ y $x = 0$ sobre R_2.

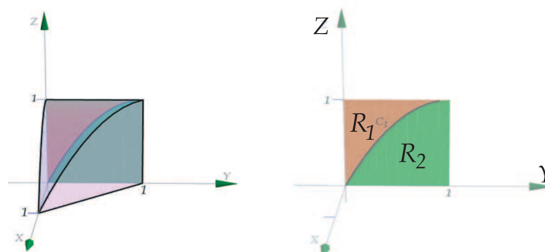


Figura 6.18 Proyección sobre yz

Integrando en el orden "$dz\,dy$" queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_{2y-y^2}^1 \sqrt{1-z} \,-\, 0 \,dz\,dy + \int_0^1 \int_0^{2y-y^2} 1-y \,-\, 0 \,dz\,dy \\ &= \int_0^1 \frac{2\left(1-2y+y^2\right)^{3/2}}{3} \,dy + \int_0^1 \left(2y-3y^2+y^3\right) dy \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Nota: $\left(1-2y+y^2\right)^{3/2} = \sqrt{(y-1)^6} = |(y-1)^3| = -(y-1)^3$ si $y \in [0,1]$.

• Cálculo de V_Q proyectando sobre el plano xy. La proyección sobre el plano xy se muestra en la figura 6.19.

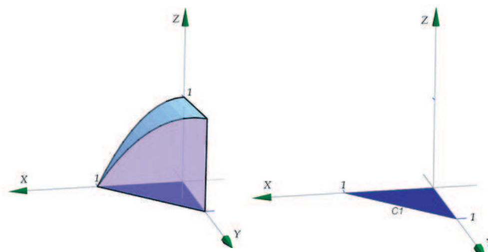


Figura 6.19 Proyección sobre xy

La ecuación de la curva C_1 corresponde a $y = 1-x$ con $x \in [0,1]$. Desde el punto de vista del plano xy, el sólido Q esta entre las superficies $z = 1-x^2$ y $z = 0$.

Integrando en el orden "$dy\,dx$" queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x^2 \,-\, 0 \,dy\,dx \\ &= \int_0^1 1-x-x^2(1-x)\,dx \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.10**

Sea Q es el sólido limitado por las superficies

$$x^2+z^2=4, \quad ,x+y=5, \quad z=2, \quad y=z=0$$

Plantear la o las integrales dobles necesarias para calcular V_Q usando como región R cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos yz, xz, xy

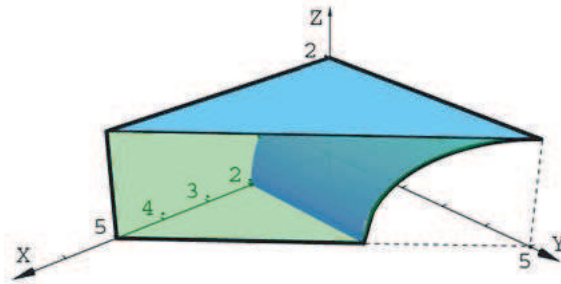


Figura 6.20 Sólido Q

Solución.

• Cálculo de V_Q proyectando sobre el plano xz.

La proyección R_{yz} sobre el plano xz se muestra en la figura 6.21. La ecuación de la curva C_2 corresponde a $x^2+z^2=4$ con $x \in [0,2]$.

Sobre la región R_{yz}, el sólido Q esta entre las superficies $y=0$ (abajo) y $y=5-x$ (arriba).

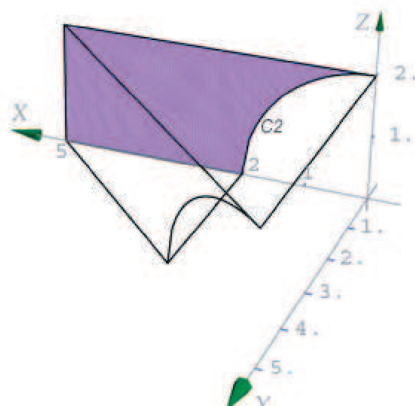


Figura 6.21 Proyección sobre xz

Usando el orden de integración "$dx\,dz$" tenemos

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^2 \int_{\sqrt{4-z^2}}^5 5-x \,-\, 0\,dx\,dz \\ &= \int_0^2 \frac{29}{2} - \frac{z^2}{2} - 5\sqrt{4-z^2}\,dz \\ &= \frac{29z}{2} - \frac{z^3}{6} - \frac{5z\sqrt{4-z^2}}{2} - 10\arcsin\left(\frac{z}{2}\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587 \end{aligned}$$

Nota: utilizando la sustitución trigonométrica $\frac{z}{2} = \operatorname{sen}\theta,$ se obtiene (salvo constantes)

$$\int \sqrt{4-z^2}\,dz = \frac{z\sqrt{4-z^2}}{2} + 2\arcsin\left(\frac{z}{2}\right).$$

• Cálculo de V_Q proyectando sobre el plano yz.

La proyección R_{yz} sobre el plano yz se muestra en la figura (6.22) Para hallar la ecuación de la curva C_1 observe que esta curva esta arriba del eje y por lo que:

$$x^2+z^2=4 \cap x+y=5 \implies \begin{cases} z = +\sqrt{4-(5-y)^2} & \text{si} \quad y\in[3,5] \\ & \text{o} \\ y = 5-\sqrt{4-z^2} & \text{si} \quad z\in[0,2] \end{cases}$$

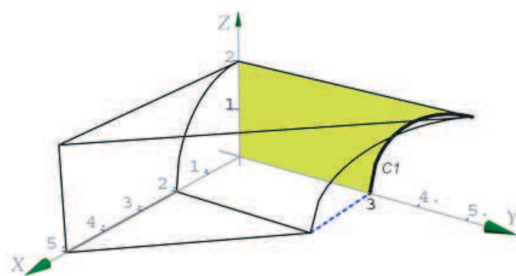


Figura 6.22 Proyección sobre yz

Sobre la región R_{yz}, el sólido Q está entre las superficies $x=\sqrt{4-z^2}$ (abajo) y $x=5-y$ (arriba).

• Usando el orden de integración "$dydz$" tenemos

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^2 \int_0^{5-\sqrt{4-z^2}} 5 - y \,-\, \sqrt{4-z^2}\, dy\, dz \\ &= \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587 \end{aligned}$$

• Cálculo de V_Q proyectando sobre el plano xy.

La proyección sobre el plano se muestra en la figura 6.23. La ecuación de la curva C_3 corresponde a $y = 5 - x$ con $x \in [0,5]$. Esta curva divide la región de integración en dos regiones R_1 y R_2. El sólido Q esta limitado por las superficies

- $z = \sqrt{4-x^2}$ (abajo) y $z = 2$ (arriba) sobre R_1
- $z = 0$ (abajo) y $z = 2$ (arriba) sobre R_2

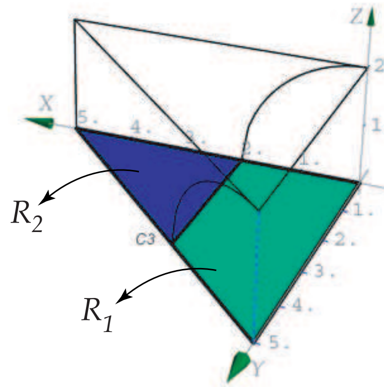


Figura 6.23 Proyección sobre xy

Usando el orden de integración "$dydx$" tenemos

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^2 \int_0^{5-x} 2 \,-\, \sqrt{4-x^2}\, dy\, dx + \int_2^5 \int_0^{5-x} 2 \,-\, 0\, dy\, dx \\ &= \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587 \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.11**

El sólido Q (figura 6.24) esta limitado por las superficies

$$4z = x^2 + y^2,\ y = 3,\ y = 1,\ z = 4, \quad \text{y} \quad x = 0$$

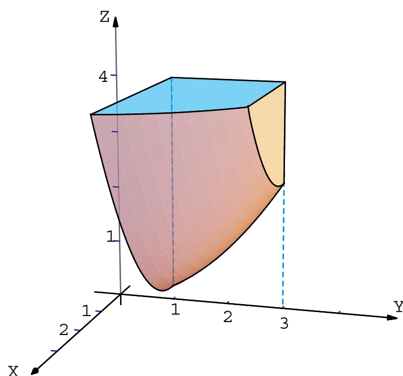


Figura 6.24 Sólido Q.

1. Dibuje la región de integración en el plano yz.

2. Plantee la o las integrales correspondientes al volumen del sólido utilizando la proyección del item anterior.

Solución.

La región de integración aparece en la figura 6.25.

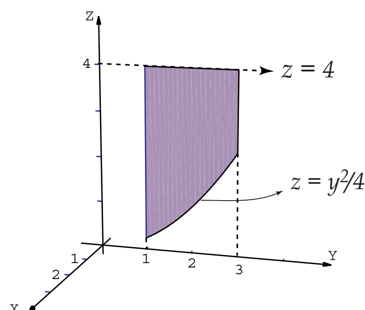


Figura 6.25 Sólido Q.

$$V_Q = \int_1^3 \int_{y^2/4}^4 \sqrt{4z - y^2} - 0\, dz\, dy$$

EJERCICIOS

6.1 A continuación se dan algunos sólidos y sus proyecciones. Determine las curvas que limitan cada proyección y planteé la integral o las integrales para calcular la medida del volumen.

a) Sólido Q limitado por las superficies

$$y+z=1,\ y=\sqrt{x},\ x=z=0$$

Las proyecciones se pueden ver en la figura 6.26

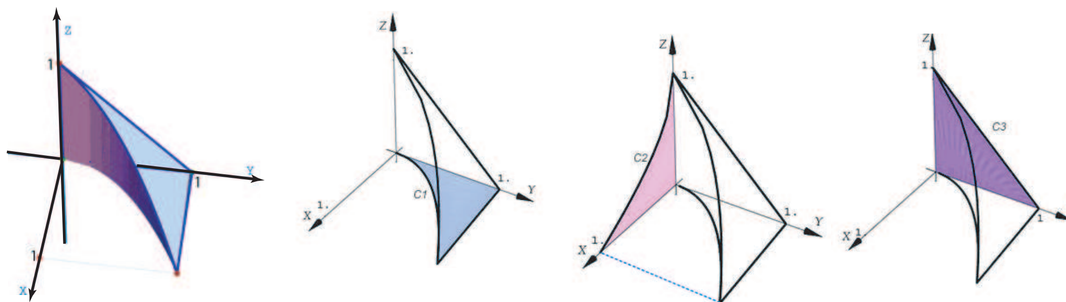


Figura 6.26 Sólido Q y sus proyecciones.

b) Sólido Q limitado por las superficies

$$z=4-x^2,\ 4y+3z=20,\ x-y-z=0,\ x=y=z=0$$

Las proyecciones se pueden ver en la figura 6.27

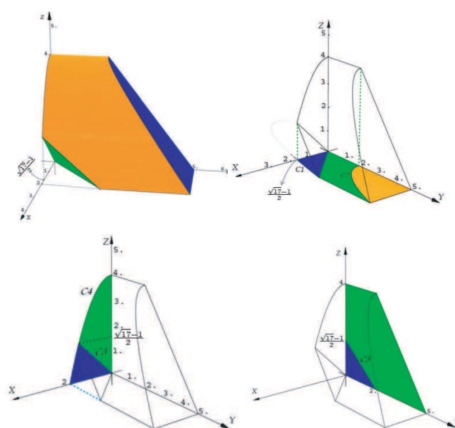


Figura 6.27 Sólido Q y sus proyecciones.

c) Sólido Q limitado por las superficies

$$z=x^2+y^2+1,\ \ x+y=2,\ \ x=y=z=0$$

Las proyecciones se pueden ver en la figura 6.28

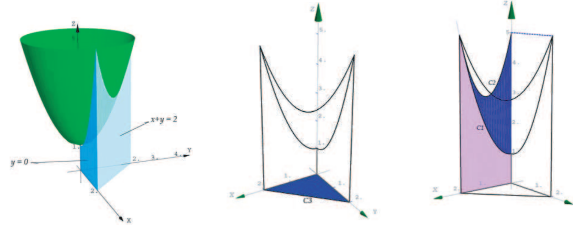


Figura 6.28 Sólido Q y sus proyecciones.

6.4 CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DOBLE.

Teorema 6.1 *Sea f una función acotada sobre una región R y sea $r : R' \longrightarrow R$ una aplicación biyectiva continuamente diferenciable con*

$$r(u,v) = (\,x(u,v),\, y(u,v)\,)$$

entonces

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_{R'} f(\,x(u,v),\, y(u,v)\,) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv$$

Cuando hacemos un cambio de variable, la región R sufre una deformación por lo que se necesita el factor $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ para compensarla.

6.4.1 Caso de Coordenadas Polares.

Poniendo $u = r$ y $v = \theta$ tenemos el cambio de variable $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\text{sen}(\theta)$. Esta aplicación es biyectiva si $r > 0$ y si $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$. En este caso,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

www.elsolucionario.net

y entonces tendríamos

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{R'} f(\,r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\,)\,r\,dr\,d\theta$$

Si una región R se puede describir como la región en coordenadas polares tal que

$$\varphi_0(\theta) \le r \le \varphi_1(\theta) \quad \text{si} \quad \theta_0 \le \theta \le \theta_1$$

entonces

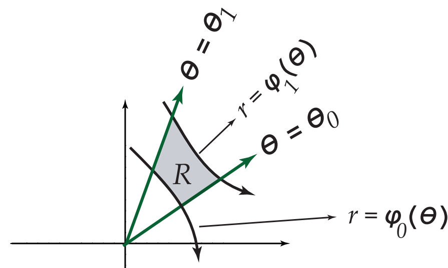


Figura 6.29 R

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\varphi_0(\theta)}^{\varphi_1(\theta)} f(\,r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\,)\,r\,dr\,d\theta$$

■ **EJEMPLO 6.12**

Calcular el área A_c del círculo de radio R.

Solución.

El círculo $x^2+y^2=R^2$ tiene ecuación $r=R$ en coordenadas polares. La región del círculo está entre el origen, $r=0$, y la circunferencia $r=R$ si $0\le\theta\le 2\pi$.

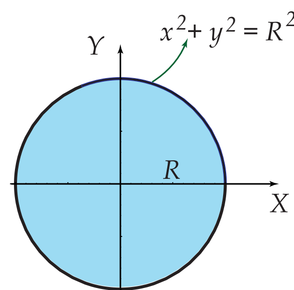


Figura 6.30 Círculo de radio R.

$$\begin{aligned} A_c &= \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,d\theta \\ &= \frac{R^2}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = \pi R^2. \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.13**

Considere la región R de la figura 6.31. Para calcular el área A_R de la región R, usando coordenadas polares, debemos hacer el cambio de variable $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\,\text{sen}(\theta)$.

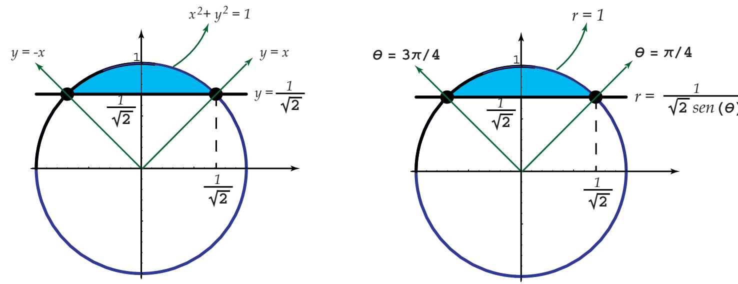


Figura 6.31 Región R en coordenadas rectangulares y polares.

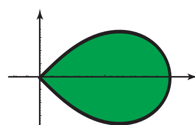
Observe que

- La recta $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ se transforma en $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\text{sen}(\theta)}$
- El círculo $x^2 + y^2 = 1$ se transforma en $r = 1$.
- La recta $y = x$ se transforma en $\theta = \pi/4$. En efecto, $y = x \implies \cos\theta = \text{sen}(\theta) \implies \theta = \pi/4$. Esto, por supuesto, también lo podemos establecer de manera geométrica.

$$
\begin{aligned}
A_R &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\text{sen}(\theta)}}^{1} r\,dr\,d\theta \\
&= \int\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}\text{sen}(\theta)}}^{1} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\text{sen}^2(\theta)}\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\csc^2(\theta)\,d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\cot(\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi - 2}{4}
\end{aligned}
$$

■ **EJEMPLO 6.14**

Calcular el área de la región limitada por la curva $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$, $x \geq 0$.

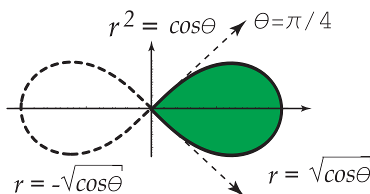


Solución.

Haciendo el cambio de variable $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y sustituyendo en $(x^2+y^2)^2 - x^2+y^2 = 0$, obtenemos

$$\left(r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2\right)^2 - r^2\cos(\theta)^2 + r^2\,\text{sen}(\theta)^2 = 0$$

Simplificando queda $r^2 = \cos(2\theta)$, que es la ecuación de la lemniscata. Como $x \geq 0$ entonces la mitad de la lemniscata que nos interesa es $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$. Las tangentes al polo son $\theta = -\pi/4$ y $\theta = \pi/4$.



Luego, el área de la región es $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r\,dr\,d\theta = 1/2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(2\theta)\,d\theta = 1/2.$

■ **EJEMPLO 6.15**

Calcule el volumen del sólido Q limitado por las superficies $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$, $x^2+y^2 = 1$ y $z = 0$.

Solución.

El sólido y su proyección sobre el plano xy se ven en la figura 6.32.

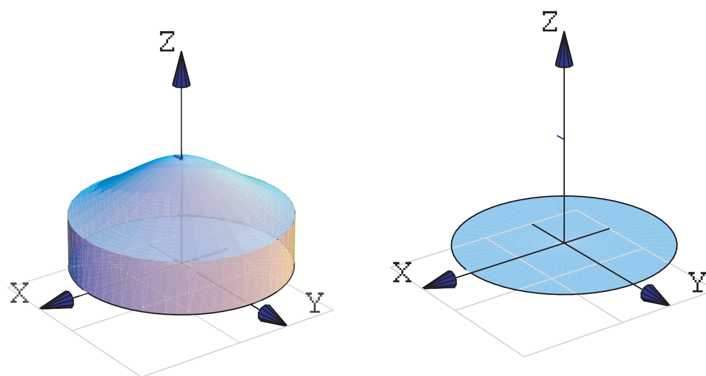


Figura 6.32 Sólido Q y su proyección sobre xy.

Pasando a coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} V_Q &= \int\int_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(2)\,d\theta = \pi\ln(2) \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.16**

Plantear una integral, en polares, para medir el volumen del sólido Q limitado por las superficies $z = \dfrac{y}{x^2+4}$, $x^2+y^2 = 4$ y $z = 0$ con $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Solución.

El sólido y su proyección sobre el plano xy se ven en la figura 6.33.

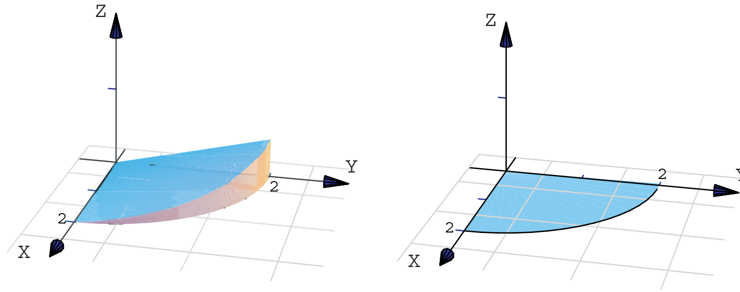


Figura 6.33 Sólido Q y su proyección sobre xy.

Pasando a coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} V_Q &= \int\int_R \frac{y}{x^2+4}\,dA \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{r\,\text{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\,r\,dr\,d\theta \end{aligned}$$

Nota: esta última integral se puede calcular observando que

- $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-x+\left(1+x^2\right)\arctan x\right)$, salvo constantes.
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2 f(r,\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^2\int_0^{\pi/2} f(r,\theta)\,d\theta\,dr$, pues estamos integrando sobre un rectángulo.

Veamos

$$\begin{aligned} V_Q &= \int\int_R \frac{y}{x^2+4}\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{r^2\,\text{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^2\int_0^{\pi/2} \frac{r^2\,\text{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+4}\,d\theta\,dr = \int_0^2\int_0^1 \frac{r^2}{4+r^2u^2}\,du\,dr, \quad \text{(haciendo } u=\cos\theta\text{).} \\ &= \int_0^2\int_0^1 \frac{r}{2}\,\frac{r/2}{1+(ru/2)^2}\,du\,dr = \int_0^2 \frac{r}{2}\arctan(ru/2)\Big|_0^1\,dr = \int_0^2 \frac{r}{2}\arctan(r/2)\,dr \\ &= 2\int_0^1 x\arctan(x)\,dx = \frac{1}{2}(\pi-2). \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.17**

Calcule $\displaystyle\int\!\!\int_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dA$ si $R=\{(x,y)\in\mathbb{R} : x^2+y^2\leq 1,\, x\geq 0,\, y\geq 0\}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{(1+r^2)^2}\,dr\,d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\cdot\int_0^1\frac{r^3}{(1+r^2)^2}\,dr\\
&= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{r^3}{(1+r^2)^2}\,dr\\
&= \frac{1}{8}\int_0^1\frac{4r^3+4r}{1+2r^2+r^4}\,dr-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2r}{(1+r^2)^2}\,dr\\
&= \frac{1}{8}\ln|1+2r^2+r^4|\Big|_0^1+\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+r^2}\Big|_0^1=\frac{1}{8}\ln 4-\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

6.2 Calcule $\displaystyle\int\!\!\int_R \frac{dA}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dA.$

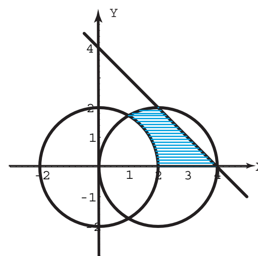


Figura 6.34 Región R

La región R es la región limitada por los círculos $x^2+y^2=4$, $(x-2)^2+y^2=4y$ y las rectas $x+y=4$, $y=0$, como se muestra en la figura 6.34.

6.3 Plantear la o las integrales que dan el área de esta región R.

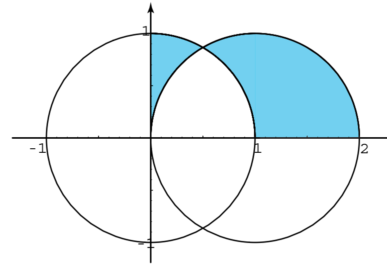
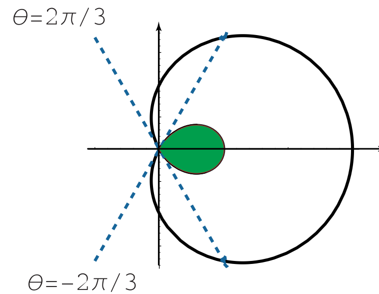


Figura 6.35 Región R

La región región R está sombreada en la figura 6.35. Esta región está limitada por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $(x-1)^2+y^2=1$.

6.4 Calcular el área de la región limitada por el lazo de la curva $r=1/2+\cos\theta$.
$R/\quad -3\sqrt{3}/8+\pi/4$.



Ayuda: notar que el lazo tiene ecuación $r=1/2+\cos\theta$, $2\pi/3\le\theta\le 4\pi/3$.

6.5 Utilizando coordenadas polares, plantear la o las integrales que permiten calcular el área de la región R (región sombreada) mostrada en la figura 6.36.

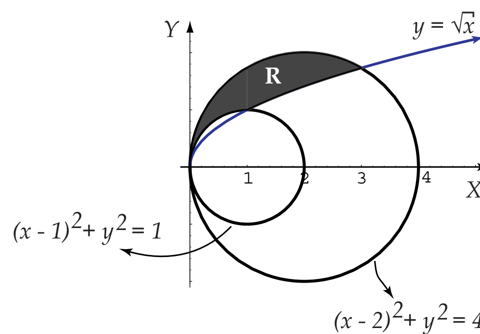


Figura 6.36 Región R

6.6 Calcule el volumen del sólido Q limitado por $S_1:\ x^2+z^2=4$, $S_2:\ y+x=2$, $S_3:\ z=4$, $S_5:\ y=0$, $S_6:\ x=0$.

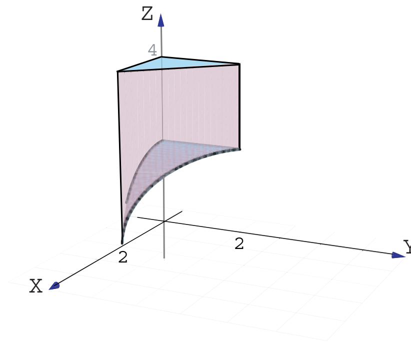


Figura 6.37

6.5 INTEGRAL TRIPLE.

Sea Q es un sólido limitado por superficies suaves de ecuación $z = F_1(x,y)$ (abajo) y $z = F_2(x,y)$ (F_1, F_2 con derivadas parciales continuas) y con su proyección R limitada por funciones con derivadas continuas. Si $f(x,y,z)$ es continua sobre Q, se puede establecer (por ejemplo) que

$$\int\int\int_Q f(x,y,z)\,dV = \int\int_R \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

En particular, $V_Q = \int\int_R \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} 1\,dz\,dy\,dx$

■ **EJEMPLO 6.18**

Calcular $\int\int\int_Q x\cos(y+z)\,dV$ con Q el sólido limitado por

$$y+z=\pi,\ y=x,\ x=z=0$$

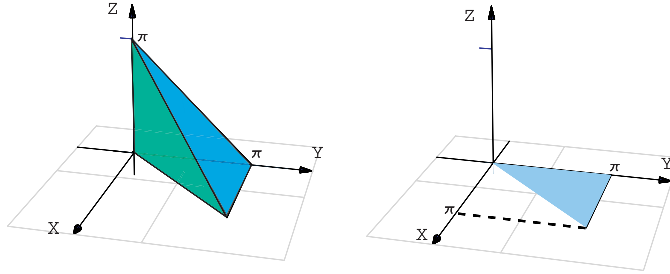


Figura 6.38 Sólido Q y sus proyección en el plano xy.

Solución.

Para calcular esta integral triple vamos a necesitar la integral $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\,\text{sen}\,x + K$ (se calcula "por partes".)

$$\begin{aligned}
\iiint_Q x\cos(y+z)\,dV &= \int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\left[\int_0^{\pi-y} x\cos(y+z)\,dz\right]dy\,dx \\
&= \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} x\,\text{sen}(y+z)\Big|_0^{\pi-y}\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} -x\,\text{sen}(y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\pi} -x\cos(y)\Big|_x^{\pi}\,dx \\
&= \int_0^{\pi} -x - x\cos(x)\,dx \\
&= -\frac{x^2}{2} - \cos x - x\,\text{sen}\,x\Big|_0^{\pi} = 2 - \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.19**

Calcular, usando el orden "$dx\,dz\,dy$", $\iiint_Q 2x\cos(y+z)\,dV$ con Q el sólido limitado por

$$y+z=\pi,\ y=\sqrt{x},\ x=z=0$$

Solución.

Por el orden de integración que se pide, debemos proyectar sobre el plano yz.

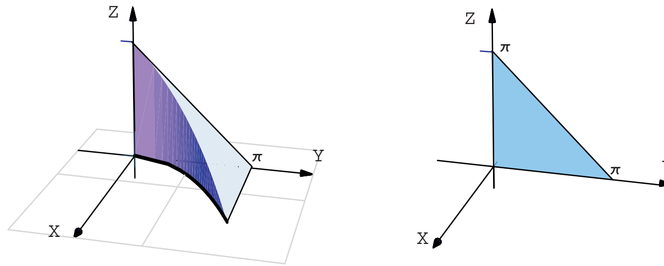


Figura 6.39 Sólido Q y sus proyección en el plano yz.

Usaremos las integral $\int y^4 \operatorname{sen} y\, dy = -\left(24-12y^2+y^4\right)\cos y + 4y\left(-6+y^2\right)\sin y + K$, que se calcula "por partes".

$$\begin{aligned}
\int\int\int_Q 2x\cos(y+z)\,dV &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi-y}\left[\int_0^{y^2} 2x\cos(y+z)\,dx\right]dz\,dy \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi-y} x^2\cos(y+z)\Big|_0^{y^2}\,dz\,dy \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi-y} y^4\cos(y+z)\,dz\,dy \\
&= \int_0^{\pi} y^4\operatorname{sen}(y+z)\Big|_0^{\pi-y}\,dy \\
&= \int_0^{\pi} -y^4\operatorname{sen}(y)\,dy = -48+12\pi^2-\pi^4
\end{aligned}$$

6.6 CAMBIO DE VARIABLES. COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS.

Si hacemos el cambio de variable $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ entonces, por ejemplo,

$$\int\int\int_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_{Q'} f(x(u,v,w)),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw$$

donde $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$

6.6.1 Coordenadas Cilíndricas.

En el caso de coordenadas cilíndricas, la posición de un punto en el espacio está determinada por los números r,θ,z donde r es la distancia del punto al origen y θ es la medida del ángulo de la proyección del punto en el plano xy con el eje x.

En este caso $u = r,\ v = \theta,\ w = w.$ El cambio de variable es

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta, \qquad \text{además} \qquad |J| = r \\ z &= z \end{aligned}$$

y entonces

$$\int\int\int_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_{Q'} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

■ **EJEMPLO 6.20**

1. Verifique que el volumen de un cilindro recto de radio R y altura h, es $\pi R^2 h$.

2. Verifique que el volumen una esfera de radio R es $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Solución.

1. Volumen de un cilindro recto de radio R y altura h.

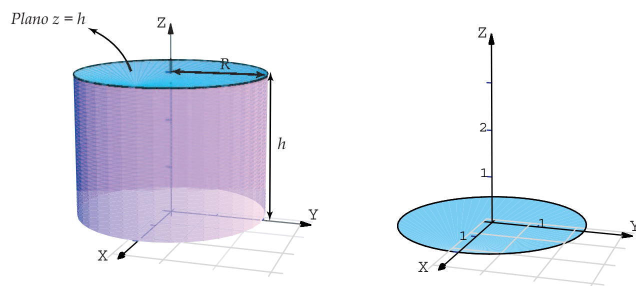


Figura 6.40 Cilindro recto y su proyección en el plano xy.

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_Q dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R rh\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}h\,d\theta \\
&= \left.\frac{R^2}{2}h\theta\right|_0^{2\pi} = \pi R^2 h
\end{aligned}
$$

2. Volumen de una esfera de radio R. Podemos calcular el volumen de un octavo de esfera y multiplicar por 8 (ver figura 6.41).

   La esfera tiene ecuación $x^2+y^2+z^2=R^2$. Haciendo el cambio $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$ queda $z=\sqrt{R^2-r^2}$. Así, el octavo de esfera está entre $z=0$ y $z=\sqrt{R^2-r^2}$

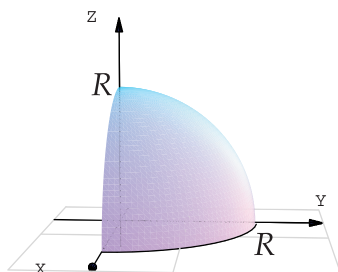


Figura 6.41 Un octavo de esfera

$$
\begin{aligned}
V &= 8\cdot\iiint_Q dV = 8\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 8\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\,d\theta = 8\cdot\int_0^{\pi/2} \left.\frac{-\sqrt{(R^2-r^2)^3}}{3}\right|_0^R d\theta = 8\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{R^3}{3}\,d\theta \\
&= \left.\frac{8R^3}{3}\theta\right|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}R^3\pi
\end{aligned}
$$

■ **EJEMPLO 6.21**

El sólido Q de la figura 6.42 esta limitado por el cilindro $x^2+y^2=4$ y el plano $y+z=4$. Calcular el volumen de Q.

Solución.

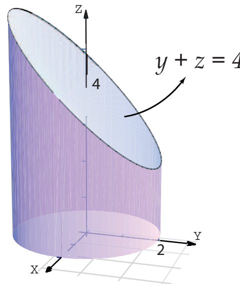


Figura 6.42 Sólido Q.

Observemos que Q está entre las superficies $z=0$ y $z=4-y=4-r\operatorname{sen}\theta$. La región de integración en el plano xy es el círculo $x^2+y^2=4$, es decir el círculo $r=2$ con $0\leq\theta\leq 2\pi$.

$$
\begin{aligned}
V_Q &= \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r\operatorname{sen}\theta} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,(4-r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} 8-\frac{8\operatorname{sen}\theta}{3}\,d\theta = 16\pi.
\end{aligned}
$$

■ **EJEMPLO 6.22**

Considere el sólido Q limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ (cono), y el plano $z = 1$.

1. Calcular $\displaystyle\iiint_Q 2z\,dx\,dy\,dz$.

2. Calcular el volumen de Q.

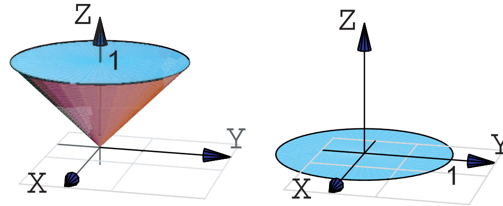


Figura 6.43 Sólido Q y sus proyección en el plano xy.

Solución.

1. En coordenadas rectangulares tendríamos

$$\begin{aligned}\iiint_Q 2z\,dx\,dy\,dz &= \iint_R\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2z\,dz\,dy\,dx\\ &= \int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2z\,dz\,dy\,dx\end{aligned}$$

La región de integración se describe fácil si usamos coordenadas cilíndricas.

La proyección R sobre el plano xy es un círculo de radio 1. En coordenadas polares esta región se describe como $R:\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$.

Usando el cambio de variable $x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta,$ entonces el sólido está entre las superficies $z = r$ y $z = 1$.

$$\begin{aligned}\iiint_Q 2z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 2z\,dz\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 z^2\Big|_r^1 r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r - r^3\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. Volumen de Q.

$$\begin{aligned}\iiint_Q dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\Big|_r^1 r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r - r^2\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{6}\,d\theta = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.23**

Calcule el volumen del sólido de la figura 6.44. Este sólido Q está limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el cilindro $x^2+(y-1)^2=1$, $z\geq 0$.

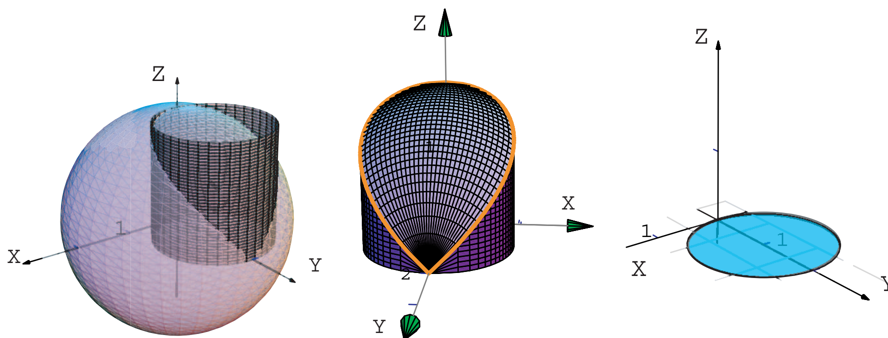


Figura 6.44 Sólido Q y sus proyección en el plano xy.

Solución.

El Sólido Q está entre las superficies $z=0$ y $z=\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-r^2}$.

La proyección del solido es el círculo $x^2+(y-1)^2=1$. Este círculo se describe en coordenadas polares como

$$0\leq r\leq 2\operatorname{sen}\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

o también,

$$0\leq r\leq 2\operatorname{sen}\theta,\ \leq\theta\leq\pi$$

Luego

$$\begin{aligned}\int\int\int_Q dx\,dy\,dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} dz\,r\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} zr\Big|_0^{\sqrt{4-r^2}}dr\,d\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\operatorname{sen}\theta}d\theta\\ &= -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4-4\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}-8\,d\theta=-\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}8\cos^3\theta-8\,d\theta=-\frac{8}{3}(4/3-\pi).\end{aligned}$$

Aquí se usó la integral $\displaystyle\int\cos^3 t\,dt=\frac{3\sin(t)}{4}+\frac{\sin(3t)}{12}$.

■ **EJEMPLO 6.24**

Calcule, *usando coordenadas cilíndricas,* el volumen del sólido Q, limitado por la porción de paraboloide $z=4-x^2-y^2$, la porción de esfera $x^2+y^2+z^2=16$ y el plano $x=y$; en el primer octante (figura 6.45).

www.elsolucionario.net

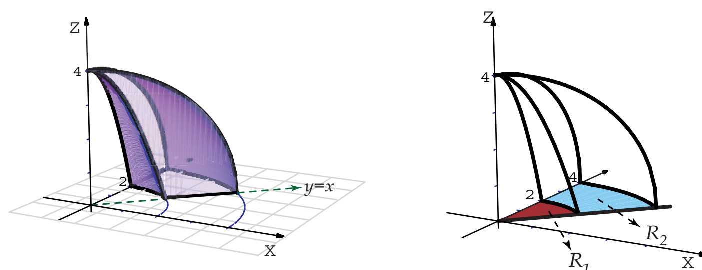


Figura 6.45 Sólido Q.

Solución.

La región e integración, proyectando sobre XY, es $R = R_1 \cup R_2$.

- $R_1: \ 0 \leq r \leq 2, \ \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2,$
- $R_2: \ 2 \leq r \leq 4, \ \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2.$
- En la región R_1, el sólido está entre la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y la porción de paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.
- En la región R_2, el sólido está entre la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el plano $z = 0$.

$$\begin{aligned}
V_Q &= \iiint_Q dV \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 \int_{4-r^2}^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_2^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 r\sqrt{16-r^2} - r(4-r^2)\,dr\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_2^4 r\sqrt{16-r^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} - 2r^2 + \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2}\Big|_2^4 d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} - 2r^2 + \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2}\Big|_2^4 d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{52}{3} - 8\sqrt{3}\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\sqrt{3}\,d\theta \\
&= \left(\frac{13}{3} - 2\sqrt{3}\right)\pi + 2\pi\sqrt{3} = \frac{13\pi}{3}.
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.25**

El sólido Q (figura 6.46) es un casquete, de altura h, de una esfera de radio R.

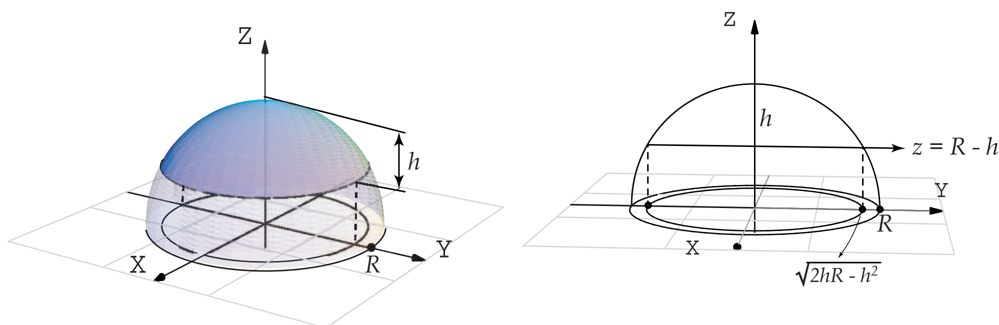


Figura 6.46 Sólido Q y su proyección en el plano xy.

Vamos a usar coordenadas cilíndricas. Para calcular su volumen proyectamos sobre el plano xy. La proyección del casquete es un círculo de radio $\sqrt{2hR-h^2}$. Este radio se obtiene calculando la intersección de la curva $z^2+y^2=R^2$ y la recta $z=R-h$.

El sólido Q está limitado arriba por la superficie $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-r^2}$ y por abajo por la superficie $z=R-h$. Entonces

$$V_Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2hR-h^2}} r\sqrt{R^2-r^2}-r(R-h)\,dr\,d\theta$$

Como (usando "sustitución") $\displaystyle\int r\sqrt{R^2-r^2}\,dr=-\frac{1}{3}\sqrt{(R^2-r^2)^3}$ salvo constantes, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2hR-h^2}} r\sqrt{R^2-r^2}-r(R-h)\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}-\frac{1}{3}\sqrt{(R^2-r^2)^3}-\frac{r^2(R-h)}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{2hR-h^2}}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}-\frac{1}{3}\,(R-r)^3-\frac{(2hR-h^2)(R-h)}{2}+\frac{1}{3}R^3\,d\theta\\ &= \frac{\pi}{3}h^2(3R-h)\end{aligned}$$

EJERCICIOS

6.7 Calcule el volumen del sólido Q (figura 6.47) limitado por el cono $z^2=x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

6.8 Calcule el volumen del sólido Q (figura 6.48) limitado por un cilindro de radio a y otro de radio b, ambos de altura h.

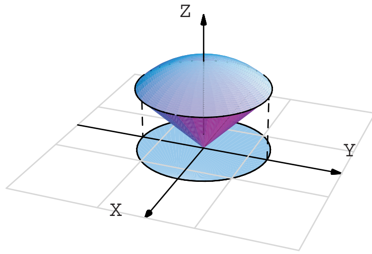


Figura 6.47 Sólido Q.

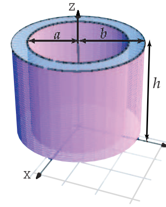


Figura 6.48 Sólido Q.

6.9 Calcule el volumen del sólido Q (figura 6.49) limitado por un casquete de esfera centrada en el origen y un cilindro recto de radio a y altura h. *Sugerencia:* Con los datos encuentre el radio de la esfera de la cual forma parte el casquete.

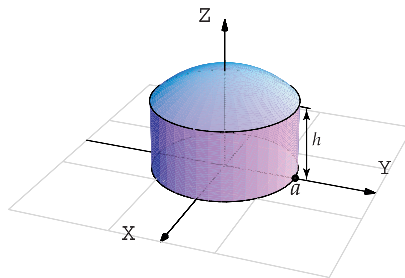


Figura 6.49 Sólido Q.

6.10 Sea $I = \int\int\int_Q \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dzdydx$

a) Dibuje el sólido Q.

Respuesta. Se omite.

Observe que el sólido está entre las superficies $z^2+x^2+y^2=16$, $x^2+y^2=4$, $x \in [0,2]$.

b) Calcule I usando coordenadas cilíndricas.

Respuesta. $\dfrac{8\pi^2}{3} - 2\sqrt{3}\pi.$

6.6.2 $(*)$ Coordenadas Esféricas.

En el caso de coordenadas esféricas, la posición de un punto en el espacio está determinada por los números r, θ, φ donde r es la distancia del punto al origen, θ es la medida del ángulo de la proyección del punto en el plano xy con el eje x (llamado "longitud") y φ es la medida del ángulo de la proyección del punto con el segmento que va del origen al punto plano xy con el eje x (llamado "latitud").

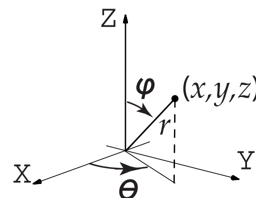


Figura 6.50 Coordenadas esféricas

También se puede tomar φ como la medida del ángulo desde el eje z como se ve en la figura 6.50.

6.6.3 $(*)$ Describiendo Superficies en Coordenadas Esféricas.

En lo que sigue, φ lo tomaremos como aparece en la figura 6.50. En este caso,

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

con $r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$

■ **EJEMPLO 6.26**

Semi-cono $z^2 = x^2 + y^2$ con $z \geq 0$.

En la ecuación del cono $z^2 = x^2 + y^2$ hacemos la sustitución $x = r \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \quad z = r\cos\varphi$ y obtenemos

$$r^2\cos^2\varphi = r^2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta \implies \cos^2(\varphi) = \operatorname{sen}^2(\varphi)$$

Podemos tomar la solución $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Así, esta rama del cono se describe (en coordenadas esféricas) como

$$\varphi = \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r > 0.$$

Los puntos (x, y, z) de este semi-cono son de la forma $\left(r\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$, con $0 \leq \theta < 2\pi,\ r > 0$.

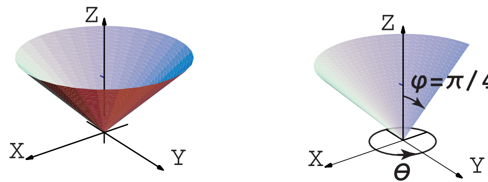


Figura 6.51 Cono $z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0$.

■ **EJEMPLO 6.27**

Q es el sólido limitado por las superficies $y = x$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; en el primer octante (figura 6.57).

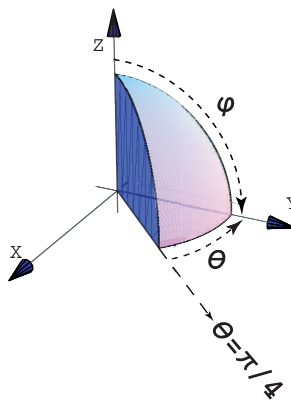


Figura 6.52 Sólido Q.

Como se ve en la figura 6.57, $0 \leq r \leq 1,\ \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

■ **EJEMPLO 6.28**

Esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Haciendo el cambio de variable y simplificando queda $r=1$. Luego, la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ se describe (en coordenadas esféricas) como

$$r=1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi$$

Los puntos (x,y,z) de este esfera de radio 1 son de la forma $(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ \cos\varphi)$, con $0\le\theta<2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi$.

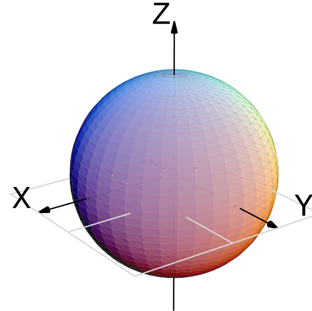


Figura 6.53 Esfera $z^2+x^2+y^2=1$

■ EJEMPLO 6.29

Esfera $(x-1)^2+y^2+z^2=1$.

Haciendo el cambio de variable y simplificando queda $r=2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$. Luego, la esfera se describe (en coordenadas esféricas) como

$$r=2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\pi$$

Los puntos (x,y,z) de este esfera de radio 1 son de la forma

$$(2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ 2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cdot\cos\varphi)$$

con $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\pi$.

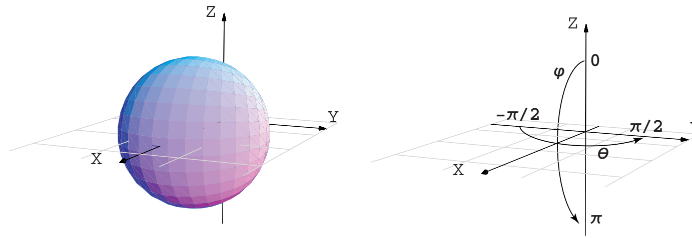


Figura 6.54 Esfera $z^2+(x-1)^2+y^2=1$

■ **EJEMPLO 6.30**

Superficie $S:(x^2+y^2+z^2)^3=z^4$.

Haciendo el cambio de variable y simplificando queda $r=\cos^2\varphi$. Luego, la superficie se describe (en coordenadas esféricas) como $r=\cos^2\varphi,\ 0\leq\theta<2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\pi$.

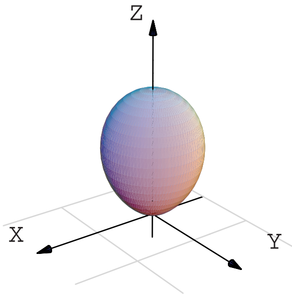


Figura 6.55 Superficie $S,\ 0\leq\varphi\leq\pi/2$

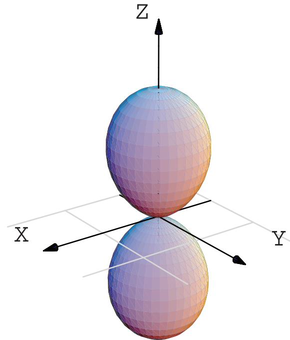


Figura 6.56 Superficie completa $S,\ 0\leq\varphi\leq\pi$

6.6.4 $(*)$ Intercambiar Ejes.

No siempre resulta conveniente tomar φ desde el eje Z. En el ejemplo 6.35 (más adelante) vamos a mostrar cómo se puede intercambiar el eje Z con otro eje y la simplificación que resulta.

6.6.5 $(*)$ Cambio de Variable con Coordenadas Esféricas.

En coordenadas esféricas ponemos $u=r, v=\theta$ y $w=\varphi$. Como dijimos antes, vamos a tomar el cambio de variable,

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y & = & r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{en este caso} \qquad |J| = r^2\,\text{sen}\,\varphi. \\ z & = & r\cos\varphi \end{array}$$

con $r > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$. Con este cambio de variable se tiene (integrando en el orden $dx\,dy\,dz$)

$$\int\int\int_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_{Q'} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta, r\,\text{sen}\,\varphi)\,r^2|\,\text{sen}\,\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

si f acotada e integrable sobre Q.

■ **EJEMPLO 6.31**

Calcule, *usando coordenadas esféricas,* la integral $\int\int\int_Q z\,dV$ si Q es el sólido limitado por las superficies $y = x$ y $x^2+y^2+z^2 = 1$; en el primer octante (figura 6.57).

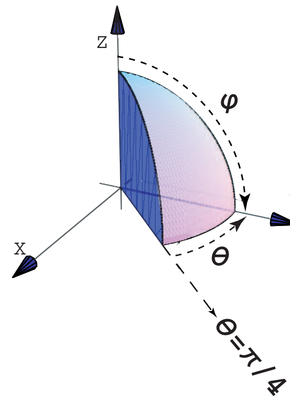


Figura 6.57 Sólido Q.

Solución.

Como se ve en la figura 6.57, $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$ y $0 \le \varphi \le \pi/2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\iiint_Q z\,dV &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos(\varphi)\cdot r^2\,\text{sen}(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\cos(\varphi)\cdot\text{sen}(\varphi)\Big|_0^1\,d\varphi\,d\theta\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\cos(\varphi)\cdot\text{sen}(\varphi)\,d\varphi\,d\theta\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{4}\,\frac{\text{sen}^2(\varphi)}{2}\Big|_0^{\pi/2}\,d\theta\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{8}\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{32}.
\end{aligned}$$

■ EJEMPLO 6.32

Calcular el volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Solución.

Vamos a calcular el volumen de un octavo de esfera. Notemos que $|\text{sen}\,\varphi| = \text{sen}\,\varphi$ en $[0,\pi/2]$.

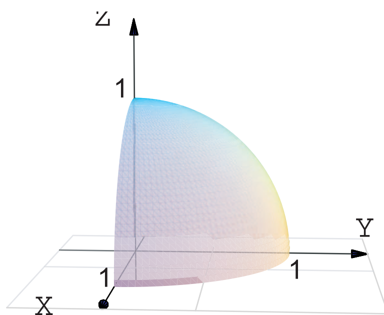


Figura 6.58 Un octavo de la esfera.

$$\begin{aligned}
V_Q &= 8\cdot\int\int\int_Q dx\,dy\,dz \\
&= 8\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2|\operatorname{sen}\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= 8\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\varphi\Big|_0^1\,d\theta\,d\varphi \\
&= 8\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{3}\,d\theta\,d\varphi \\
&= 8\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\theta\operatorname{sen}\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2}\,d\varphi \\
&= 8\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\pi\operatorname{sen}\varphi}{6}\,d\varphi \\
&= 8\cdot\left(-\frac{\pi\cos\varphi}{6}\Big|_0^{\pi/2}\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.33**

Calcular $\int\int\int_Q x^2+y^2\,dx\,dy\,dz$ donde Q es la esfera $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ (ver figura 6.54).

Solución.

La esfera se puede describir, en coordenadas esféricas, como

$$r=2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\pi$$

Notemos además que $|\operatorname{sen}\varphi|=\operatorname{sen}\varphi$ en $[0,\pi]$. Luego

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int_Q (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta}(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)\,r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi\\
&= \int_0^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{32}{5}\cos^5\theta\,\sin^8\varphi\,d\theta\,d\varphi\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{32}{5}\cos^5\theta\,d\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin^8\varphi\,d\varphi\\
&= \frac{512}{75}\cdot\frac{35\pi}{128} = \frac{28\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Aquí usamos las integrales

- $\displaystyle\int\cos^5\theta\,d\theta = \frac{5\,\sin(\theta)}{8}+\frac{5\,\sin(3\,\theta)}{48}+\frac{\sin(5\,\theta)}{80}$
- $\displaystyle\int\sin^8\varphi\,d\varphi = \frac{840\,\varphi-672\,\sin(2\,\varphi)+168\,\sin(4\,\varphi)-32\,\sin(6\,\varphi)+3\,\sin(8\,\varphi)}{3072}.$

■ **EJEMPLO 6.34**

Calcular el volumen del sólido Q de ecuación $(x^2+y^2+z^2)^3=z^4$ (ver figura 6.51).

Solución.

Q se puede describir, en coordenadas esféricas, como

$$r=\cos^2\varphi,\ 0\le\theta<2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi$$

Notemos además que $|\,\mathrm{sen}\,\varphi|=\mathrm{sen}\,\varphi$ en $[0,\pi]$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int_Q dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^2\varphi} r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi\\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\varphi)^6\,\sin(\varphi)}{3}\,d\theta\,d\varphi\\
&= \int_0^{\pi}\frac{2\,\pi\cos(\varphi)^6\,\sin(\varphi)}{3}\,d\varphi = -\frac{2\pi}{3}\,\frac{\cos(\varphi)^7}{7}\Big|_0^{\pi} = \frac{4\,\pi}{21}
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.35 (Intercambio de ejes)**

El sólido Q está limitado por las superficies $y = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; en el primer octante (figura 6.59).
Vamos a calcular $\iiint_Q z\,dV$, usando coordenadas esféricas de tres maneras distintas (variando el orden de integración $dx\,dy\,dz$).

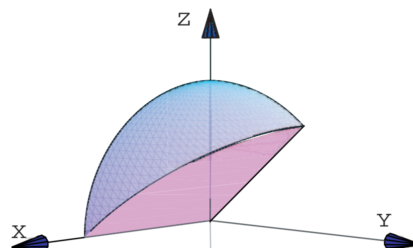


Figura 6.59 Sólido Q

A.) La manera "complicada".

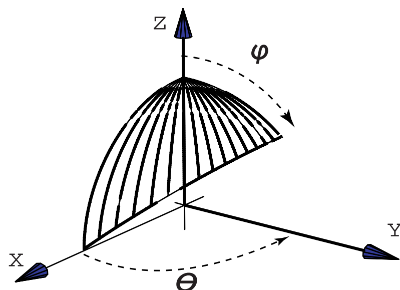


Figura 6.60 $0 \leq \varphi \leq \arctan(\csc(\theta))$ y $0 < \theta \leq \pi/2$

En este caso φ varía entre 0 y el plano $y = z$. Entonces,

$r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta = r\cos\varphi \Longrightarrow \varphi = \arctan(\csc(\theta))$.

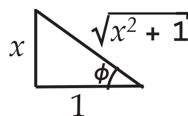
Luego, $\varphi = \pi/2$ si $\theta = 0$ y $0 < \varphi \leq \arctan(\csc(\theta))$ si $0 < \theta \leq \pi/2$.
El cambio de variable sería

$$\begin{aligned} x &= r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \qquad |J| = r^2\operatorname{sen}(\varphi). \\ z &= r\cos\varphi. \end{aligned}$$

Como tenemos $\varphi = \varphi(\theta)$, integramos en el orden $d\varphi\,d\theta$. Debemos calcular (la integral impropia)

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\arctan(\csc(\theta))}\int_0^1 r\cos(\varphi)\cdot r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

Aunque parece una integral complicada, en realidad no lo es. Solo debemos usar algunas identidades.



- $\phi = \arctan(x)$
- $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\operatorname{sen}(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\cos^2(\arctan(\csc\theta)) = \dfrac{1}{\csc^2\theta + 1}$, $\theta \in D = \mathbb{R} - \{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$

Esta última identidad se obtiene poniendo $x = \csc\theta$ si $\csc\theta > 0$ (no debemos usar ϕ!). Si $\csc\theta < 0 \Longrightarrow -\csc\theta > 0$ y la identidad se obtiene usando las identidades $\arctan(-t) = -\arctan(t)$ (pues $\tan(-t) = -\tan t$) y $\cos(-t) = \cos(t)$.

El cálculo de la integral es como sigue,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_0^{\arctan(\csc(\theta))}\int_0^1 r\cos(\varphi)\cdot r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\cos(\varphi)\cdot\operatorname{sen}(\varphi)\Big|_0^1\,d\varphi\,d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\cos(\varphi)\cdot\operatorname{sen}(\varphi)\,d\varphi\,d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{8}\cos^2(\varphi)\Big|_0^{\arctan(\csc(\theta))}\,d\varphi\,d\theta\\
&= -\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\csc^2\theta+1}-1\,d\theta\\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta+1}\,d\theta
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio $\theta = \arctan(t)$, $d\theta = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt &= \int\frac{1}{1+2t^2}\,dt\\
&= \frac{\arctan(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}+C\\
&= \frac{\arctan(\sqrt{2}\tan\theta)}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_0^{\arctan(\csc(\theta))}\int_0^1 r\cos(\varphi)\cdot r^2\operatorname{sen}(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{8}\left(\frac{\arctan(\sqrt{2}\tan\theta)}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\theta}\\
&= \frac{1}{8}\,\frac{\text{“}\arctan(\infty)\text{”}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

B.) Simplificación con un intercambio de ejes.

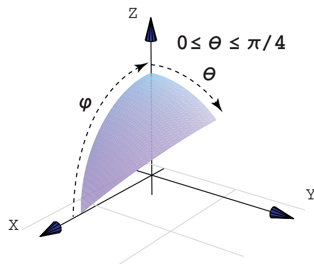


Figura 6.61 $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ y $0 \leq \theta \leq \pi/4$

El cambio de variable sería

$$\begin{aligned} z &= r\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta, \\ y &= r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta, \qquad |J| = r^2\,\text{sen}(\varphi). \\ x &= r\cos\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_Q z\,dV &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \overbrace{[r\,\text{sen}(\varphi)\cos(\theta)]}^{z}\cdot r^2\,\text{sen}(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\,\text{sen}^2(\varphi)\cos(\theta)\Big|_0^1\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\,\text{sen}^2(\varphi)\cos(\theta)\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\,\text{sen}(2\theta)\right)\frac{\cos\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2}\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\frac{\pi}{4}\,\frac{\cos\theta}{4}\,d\theta = \frac{\pi\,\text{sen}\,\theta}{16}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}, \quad \text{pues} \quad \text{sen}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

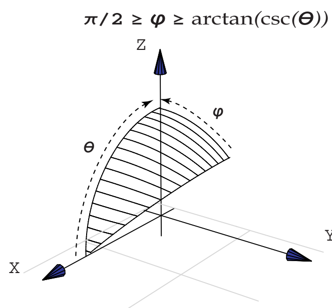


Figura 6.62 $\arctan(\csc(\theta)) \leq \varphi \leq \pi/2$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$

El cambio de variable sería

$$\begin{aligned} x &= r\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta, \\ z &= r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta, \qquad |J| = r^2\,\text{sen}(\varphi). \\ y &= r\cos\varphi. \end{aligned}$$

El cálculo de la integral es similar al primer caso.

EJERCICIOS

6.11 Sea S la esfera de radio 1 centrada en el origen. Verifique que

$$\iiint_S e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,dV = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

6.12 Sea $Q = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 4,\ 2 \le z \le 3\}$. Verificar que

$$\int\int\int_Q ze^{x^2+y^2}\,dV = \frac{5\pi}{2}(e^4-1)$$

6.13 Considere el sólido Q de la figura 6.63.

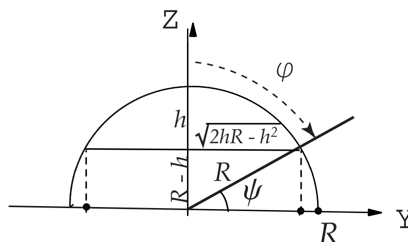


Figura 6.63 Ángulo φ.

Calcule el volumen de Q con coordenadas esféricas, usando el orden estándar de los ejes. **Ayuda:** como $\operatorname{sen}(\psi) = \dfrac{R-h}{R}$, entonces $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{R-h}{R}\right)$. La integral simplifica totalmente, pues

$$\cos\left(\pi/2 - \operatorname{arcsen}\left(\frac{R-h}{R}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{R-h}{R}\right)\right) = \frac{R-h}{R}.$$

6.7 SINGULARIDADES.

El método preferido para analizar el comportamiento de las funciones en sus singularidades es el paso al límite. Si $f(x,y)$ es continua en una región R excepto en un punto (a,b) entonces definimos $R_\varepsilon = R - B_\varepsilon$ donde B_ε es un círculo de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de (a,b). Si $\lim_{\varepsilon\to 0}\int\int_{R_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy$ existe, entonces

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\int_{R_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy$$

■ **EJEMPLO 6.36**

Calcular $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,dx.$

Solución.

Tenemos una singularidad en $y = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 x \operatorname{arcsen} y\Big|_0^{1-\varepsilon}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 x \operatorname{arcsen}(1-\varepsilon)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}(1-\varepsilon)\Big|_0^1 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 6.37**

Sea R el rectángulo $[0,1]\times[0,1]$. Calcular $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy$.

Solución.

Hay un problema en $x = 0, y = 0$.

$$\begin{aligned}
\int\int_R \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dy\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} 4(1-\sqrt{\varepsilon})^2 = 4.
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

6.14 Verifique que $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dx\,dy = \frac{8}{3}$ donde R es el rectángulo $[0,1]\times[0,1]$.

6.15 Verifique que $\displaystyle\int\int_R \ln x\,dx\,dy = 2-e$ donde
$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le e^y,\ 0\le y\le 1\}$.

Capítulo 7

INTEGRAL DE LÍNEA. INTEGRAL DE SUPERFICIE.

Walter Mora F.
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica.

7.1 CURVAS Y PARAMETRIZACIONES.

Definición 7.1 *Consideremos la función vectorial continua* $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *con* $r(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. *La imagen generada por* r *se dice que es la* curva *determinada por* r *y que une los puntos* $A = r(a)$ *y* $B = r(b)$.

• *Si* $r(a) = r(b)$, *la curva se dice* cerrada.

• *Si* r *es inyectiva en* $[a,b]$, *la curva se dice* simple.

Las curvas cerradas simples se llaman curvas de Jordan.

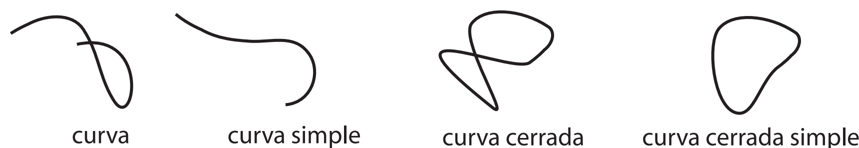


Figura 7.1 Curvas

La derivada de r se define de la manera usual

$$r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h)-r(t)}{h} = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$$

Sea $r(t)$ la descripción de una curva C en el plano o en el espacio. El parámetro t podría ser tiempo, ángulo, longitud de arco, coordenada x, etc. Decimos que la curva C es *regular* en $[a,b]$ si $r'(t)$ es continua en $[a,b]$ y $r'(t) \neq \overrightarrow{0}$ para todo $t \in [a,b]$ (es decir las componentes de r no se anulan simultáneamente). También decimos que una curva C es *regular a trozos* en $[a,b]$ si es regular en cada subintervalo de alguna partición finita de $[a,b]$.

• En $\mathbb{R}^2$ escribimos $r(t) = (x(t), y(t))$ o también $r(t) = x(t)\ \overrightarrow{i} + y(t)\ \overrightarrow{j}$, con $t \in [a,b]$

• En $\mathbb{R}^3$ escribimos $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ o también $r(t) = x(t)\ \overrightarrow{i} + y(t)\ \overrightarrow{j} + z(t)\ \overrightarrow{k}$, con $t \in [a,b]$

• Una función vectorial es de clase C^1 si las derivadas de sus componentes son continuas.

■ **EJEMPLO 7.1 (Curvas Orientadas)**

Consideremos las curvas C_1 y C_2 (figura 7.2)

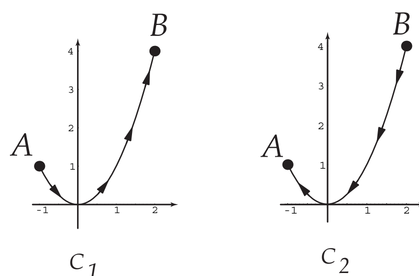


Figura 7.2 Curvas C_1 y C_2.

Ambas curvas tienen ecuación, en coordenadas rectangulares, $y = x^2$ con $x \in [-1,2]$. Pero C_1 inicia en $A = (-1,1)$ y termina en $B = (2,4)$; mientras que C_2 inicia en B y termina en A.

Para parametrizar cada curva debemos tomar en cuenta su *orientación.*

- Una parametrización de C_1 es (tomando a $x=t$ como parámetro),

$$r(t)=(x(t),y(t))=(t,t^2) \text{ o también } r(t)=t\ \overrightarrow{i}+t^2\ \overrightarrow{j} \text{ con } t\in[-1,2].$$

Observe que $r(-1)=A$ y $r(2)=B$.

- Podemos parametrizar C_2 con $x(t)=2-t$ y $y(t)=(2-t)^2$, con $t\in[0,3]$. Así, $r(0)=B$ y $r(3)=A$.

Esta parametrización es correcta pues $x(t)=2-t$ recorre de manera continua el intervalo $[-1,2]$ si $t\in[0,3]$.

$$r(t)=(x(t),y(t))=(2-t,(2-t)^2) \text{ o también } r(t)=(2-t)\ \overrightarrow{i}+(2-t)^2\ \overrightarrow{j} \text{ con } t\in[0,3].$$

■ **EJEMPLO 7.2**

Una elipse de ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ se puede parametrizar con

$$x(t)=h+a\cos(t),\ y(t)=k+b\,\text{sen}(t) \text{ con } t\in[0,2\pi[.$$

■ **EJEMPLO 7.3**

Sea C la circunferencia de la figura 7.3. La ecuación de esta curva es

$$(x-1)^2+(y-2)^2=16,\ z=3.$$

Una parametrización es

$$r(t)=(1+4\cos(t))\ \overrightarrow{i}+(2+4\,\text{sen}(t))\ \overrightarrow{j}+3\ \overrightarrow{k},\ t\in[0,2\pi[$$

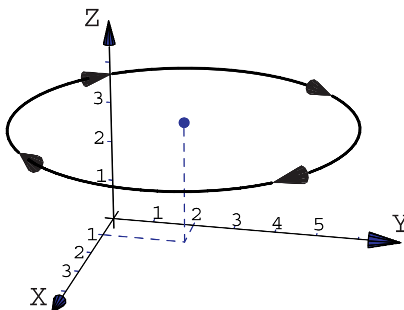


Figura 7.3 Curva C.

EJEMPLO 7.4

El segmento de recta de A hasta B se puede parametrizar con

$$r(t) = A + t(B - A) \quad \text{con} \quad t \in [0,1].$$

EJEMPLO 7.5

El segmento C_1 que va de $A = (1,2,0)$ hasta $B = (2,1,2)$, figura 7.4(a), se puede parametrizar con

$$r(t) = A + t(B - A) = (1+t,\, 2-t,\, 2t) \quad \text{con} \quad t \in [0,1].$$

EJEMPLO 7.6

A veces una curva C_2 viene definida directamente por una parametrización. Por ejemplo la hélice $x(t) = 2\cos(t),\ y(t) = 2\,\text{sen}(t),\ z(t) = t/4$ con $t \in [0,6\pi]$. Figura 7.4(b).

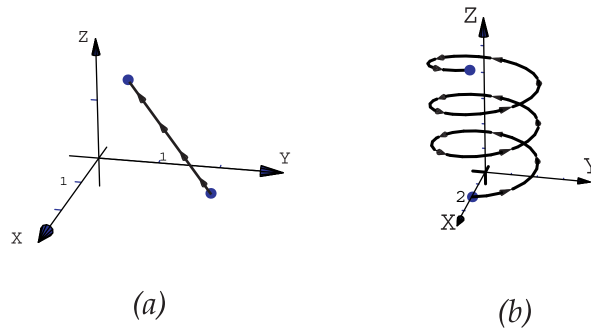


Figura 7.4 Curva C_1 y C_2.

7.2 CAMPOS ESCALARES Y CAMPOS VECTORIALES.

Definición 7.2 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.*
Una aplicación $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ se denomina campo escalar *o función escalar.*
Una función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se denomina campo vectorial.

EJEMPLO 7.7

Consideremos el campo vectorial $F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$

Para visualizarlo gráficamente, cada vector $F(x,y)$ se traslada desde el origen y se ancla en el punto (x,y).
Por ejemplo, sea $(x,y) = (\cos(\pi/4), \operatorname{sen}(\pi/4))$ (un punto de un círculo de radio 1), entonces $F(\cos(\pi/4), \operatorname{sen}(\pi/4)) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. La representación gráfica se ve en la figura 7.5.

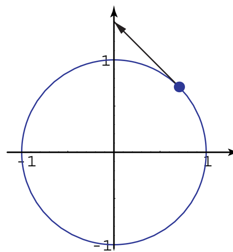


Figura 7.5 $F(\cos(\pi/4), \operatorname{sen}(\pi/4))$

■ EJEMPLO 7.8

Representación gráfica del campo vectorial $F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

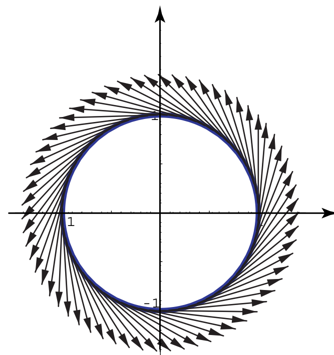


Figura 7.6 F sobre $x^2 + y^2 = 1$.

■ EJEMPLO 7.9

Representación gráfica del campo vectorial $F(x,y) = (2x, 2y)$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Observe que si $z = x^2 + y^2$ entonces $F(x,y) = \nabla z$.

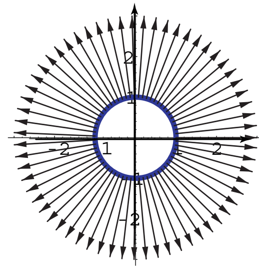


Figura 7.7 F sobre $x^2+y^2=1$.

■ **EJEMPLO 7.10**

Sea S la superficie de ecuación $z=-x^2-y^2+1$. En la figura 7.8 se presenta parte de la representación gráfica, sobre S, de los campos vectoriales

$$F_1(x,y,z)=\frac{(2x,\,2y,\,1)}{3\sqrt{4x^2+4y^2+1}},$$

$$F_2(x,y,z)=(-y\sqrt{1-z},\,x\sqrt{1-z},\,0)\ \text{y}$$

$$F_3(x,y,z)=(\cos(x),-\cos(y)\,\text{sen}(x),\,\cos(y)\,).$$

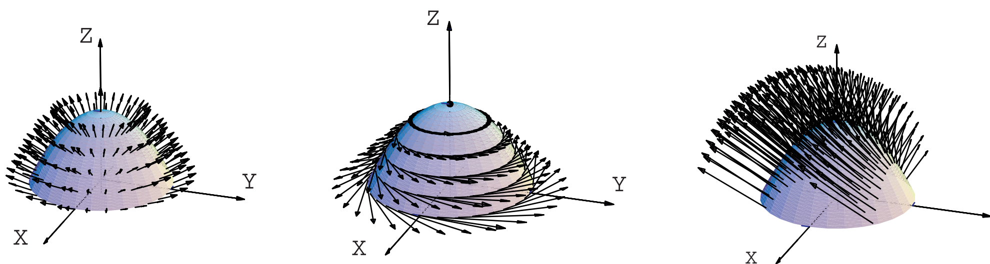


Figura 7.8 F_1,F_2 y F_3 sobre $z=-x^2-y^2+1$.

7.3 LONGITUD DE UNA CURVA.

Consideremos una curva C parametrizada por r en $[a,b]$. Para calcular la longitud de C, la idea es partir el intervalo $[a,b]$ en n partes $[a,t_1]\cup[t_1,t_2]\cup\ldots\cup[t_{n-1},b]$ y considerar una línea poligonal inscrita en C como se muestra en la figura 7.9.

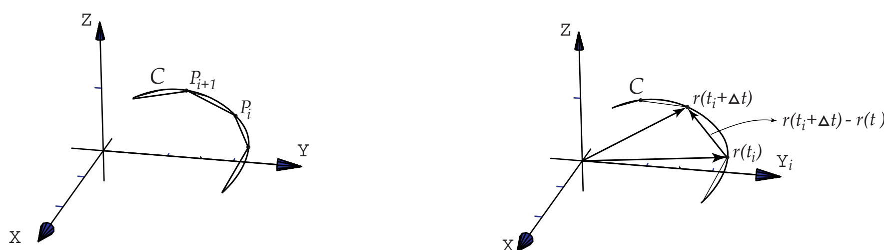


Figura 7.9 Longitud de arco como una integral de Riemann.

La longitud de la curva ("rectificable") se define como el límite al cual tiende la suma de las longitudes de los segmentos de la línea poligonal cuando $||P|| = \text{Máx}(t_{i-1} - t_i) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$, es decir

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ||r(t_i) - r(t_{i-1})||$$

Si C es regular, por el teorema del valor medio podemos poner $||r(t_i) - r(t_{i-1})|| = ||r'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})||$ con $\xi_i \in]t_i, t_{i-1}[$ y concluir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ||r'(\xi_i)\triangle t|| = \int_a^b ||r'(t)||dt$$

Definición 7.3 (Longitud de una curva) *Sea C una curva y $r(t)$, $t \in [a,b]$ una parametrización de C. Si C es regular entonces la longitud de arco de C es*

$$s = \int_C ||r'(t)||dt$$

Sea C parametrizada por $r(t)$.

Si $r(t) = x(t)\ \overrightarrow{i} + y(t)\ \overrightarrow{j}$ con $t \in [a,b]$ entonces

$$s = \int_C ||r'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Si $y = f(x)$ entonces tomando $x = t$ tenemos

$$s = \int_C ||r'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Si $r(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ con $t \in [a,b]$ entonces

$$s = \int_C ||r'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

■ **EJEMPLO 7.11**

Calcular la longitud de la circunferencia de un círculo de radio a.

Solución.

La circunferencia se puede parametrizar con $r(t) = a\cos(t)\overrightarrow{i} + a\,\text{sen}(t)\overrightarrow{j}$ con $t \in [0, 2\pi[$.

$$s = \int_C ||r'(t)||dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\,\text{sen}(t))^2 + (a\cos(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} a\,dt = 2a\pi$$

■ **EJEMPLO 7.12**

Calcular la longitud de la la hélice $x(t) = 2\cos(t)$, $y(t) = 2\,\text{sen}(t)$, $z(t) = t/4$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int_C ||r'(t)||dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\,\text{sen}^2(t) + 4\cos^2(t) + \frac{1}{16}}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{65}{16}}\,dt = 2\pi\sqrt{\frac{65}{16}}. \end{aligned}$$

7.4 INTEGRAL DE LÍNEA PARA CAMPOS ESCALARES.

Definición 7.4 *La integral de línea de la función* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *a lo largo de la curva* C, *parametrizada por* $r(t)$ *con* $t \in [a,b]$, *es*

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(r(t))||r'(t)||\,dt$$

En general, si U es convexo y contiene a C, $r \in C^1[a,b]$, y si f es continua en U; entonces la integral existe.

■ **EJEMPLO 7.13**

Sea C el segmento de recta $x = y$ con $x \in [1,2]$. Calcular $\int_C \frac{1}{2x-y}\,ds$

Solución.

Usemos la parametrización $r(t) = (t,t)$ con $t \in [1,2]$. Luego

$$\int_C \frac{1}{2x-y}\,ds \quad = \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{t}\,dt \;=\; \sqrt{2}(\ln 2)$$

■ **EJEMPLO 7.14**

Calcular $\int_C (x^2+y^2)^5\,ds$ con C la circunferencia $x = 2\cos(t)$, $y = 2\,\mathrm{sen}(t)$, $t \in [0,2\pi]$.

Solución.

$$\int_C (x^2+y^2)^5\,ds \quad = \quad \int_0^{2\pi} 4^5\sqrt{4}\,dt \;=\; 2\cdot 4^5\cdot 2\pi.$$

■ **EJEMPLO 7.15**

Calcular $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$ con C la espira (una vuelta) de la hélice $x = 2\cos(t)$, $y = 2\,\mathrm{sen}(t)$, $z = 2t$.

Solución.

$$\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{4t^2}{4}\sqrt{8}\,dt \;=\; \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^3.$$

7.5 (∗)LONGITUD DE ARCO EN COORDENADAS POLARES.

Ahora el parámetro será θ. Si C esta dada por $\rho = \rho(\theta)$ con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, entonces

$$\begin{array}{rcl} x(\theta) & = & \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) & = & \rho(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x' & = & \rho'(\theta)\cos(\theta)-\rho(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y' & = & \rho'(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)+\rho(\theta)\cos(\theta) \end{array}$$

Luego, desarrollando y simplificando: $(x')^2+(y')^2=(\rho'(\theta))^2+\rho^2(\theta)$. Así,

$$\int_C f\,ds=\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho(\theta)\cos(\theta),\rho(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta))\sqrt{[\rho'(\theta)]^2+\rho^2(\theta)}\,d\theta$$

■ **EJEMPLO 7.16**

Calcular $\displaystyle\int_C x\sqrt{x^2-y^2}\,ds$ con C la curva de ecuación $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$, $x\geq 0$.

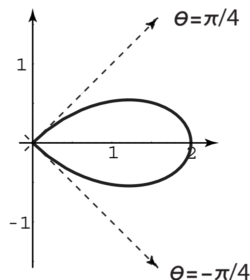


Figura 7.10 Curva C

Solución.

Cambiando a polares la curva queda con ecuación $\rho=2\sqrt{\cos(2\theta)}$ donde $-\dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}$. Además

$$(x')^2+(y')^2=[\rho'(\theta)]^2+\rho^2(\theta)=\left(-\frac{2\,\mathrm{sen}(2\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2+\left(2\sqrt{\cos(2\theta)}\right)^2=\frac{4}{\cos 2\theta}$$

$$\begin{aligned}
\int_C x\sqrt{x^2-y^2}\,ds &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho\cos\theta\,\sqrt{\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\sqrt{\frac{4}{\cos(2\theta)}}\,d\theta \\
&= 8\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta\,\cos\theta\,d\theta \quad \text{(sustituyendo } \rho \text{ y simplificando).} \\
&= 8\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta \quad \text{(sustituyendo } \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\
&= \operatorname{sen}\theta - 2\,\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{16\sqrt{2}}{3.}
\end{aligned}$$

7.6 INTEGRAL DE LÍNEA PARA CAMPOS VECTORIALES.

Trabajo.

Si una fuerza (empuje) constante $\overrightarrow{F}$ desplaza una partícula a lo largo de un vector $\overrightarrow{R}$, el trabajo realizado por esta fuerza se define como el producto de la medida del desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección de dicho desplazamiento. Si θ es la medida del ángulo formado por $\overrightarrow{F}$ y $\overrightarrow{R}$ entonces el número $||\overrightarrow{F}||\cos\theta$ es la componente de la fuerza en la dirección del movimiento[4] (0 si $\theta = \pi/2$ y $||\overrightarrow{F}||$ si $\theta = 0$) y $||\overrightarrow{R}||$ la medida del desplazamiento. Luego el trabajo realizado es

$$||\overrightarrow{F}||\,||\overrightarrow{R}||\cos\theta = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{R}$$

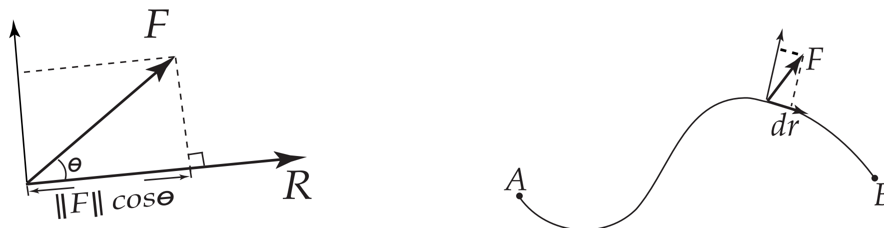


Figura 7.11 Trabajo.

Para calcular el trabajo sobre una curva, se consideran pedazos muy pequeños de la curva, tan pequeños que son, aproximadamente, segmentos de recta y la fuerza es casi constante sobre estos pedazos de tamaño $||\overrightarrow{dr}||$. El trabajo hecho por $\overrightarrow{F}$ para mover la partícula desde el inicio hasta el final de $\overrightarrow{dr}$ es $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$. Sumando todos los trabajos obtenemos

[4] F se descompone como la suma de su componente ortogonal y su proyección ortogonal sobre R. Solamente la proyección ortogonal es la parte de F responsable del trabajo que se efectúa.

$$\text{Trabajo} = \int_C F \cdot dr$$

• Si C esta parametrizada por $r(s)$ (usando la longitud de arco s como parámetro) con $0 \leq s \leq \ell$, entonces como $dr = \overrightarrow{T}\, ds$, tenemos

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{\ell} (F \cdot T)\, ds$$

La función escalar $F \cdot T$ puede tener discontinuidades de primera espacie ligadas a algún punto esquina de C.

Si C está parametrizada por $r(t)$ con $t \in [a,b]$, entonces

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b (F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{||r'(t)||})\, ||r'(t)||\, dt = \int_a^b (F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

Si $F(x,y) = P(x,y)\ \overrightarrow{i} + Q(x,y)\ \overrightarrow{j}$ entonces

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt \\ &= \int_a^b P\, dx + Q\, dy \\ &= \int_a^b P(x(t),y(t))\, x'(t)\, dt + Q(x(t),y(t))\, y'(t)\, dt \end{aligned}$$

Si $F(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ entonces

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot dr &= \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt \\ &= \int_a^b P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\,dt \\ &\quad + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt\end{aligned}$$

- Cuando una curva C es parametrizada por $r(t)$ con $t \in [a,b]$, entonces inducimos una orientación en C. Distintas parametrizaciones pueden inducir distintas orientaciones.

Por ejemplo, en la figura 7.12 se tiene la curva $y = 2\,\mathrm{sen}(x)$ con $x \in [0,3]$. Dos parametrizaciones que inducen orientaciones opuestas son $r_1(t) = (t, \mathrm{sen}\,t)$ y $r_2(t) = (3-t, \mathrm{sen}(3-t))$ ambas con $t \in [0,3]$.

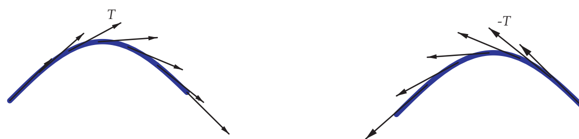


Figura 7.12 Orientación inducida por dos parametrizaciones.

Si $r_1(t)$ parametriza C en una dirección con vector tangente T y $r_2(t)$ parametriza C en sentido contrario, con vector tangente $-T$, entonces denotamos la segunda curva como $-C$ y tenemos

$$\int_{-C} F\cdot dr = -\int_C F\cdot dr$$

■ **EJEMPLO 7.17**

En este caso, la ecuación en coordenadas cartesianas de C es $y = x^2$.
$r(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 2]$ parametriza a $-C$.

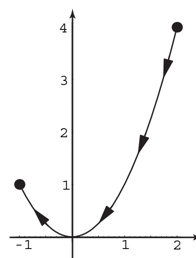


Figura 7.13 Curva C

- Si la curva orientada C es la unión de dos curvas orientadas C_1 y C_2 entonces

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$$

- Más adelante, cuando veamos el teorema de Green, usaremos la siguiente noción de orientación: *la curva cerrada C está orientada positivamente, respecto a una región R, si al movernos sobre C, la región siempre está a nuestra izquierda.*

- Note que el trabajo puede ser un número negativo. Esto ocurre cuando la fuerza actúa en contra del desplazamiento de la partícula.

■ **EJEMPLO 7.18**

Sea $F(x,y,z) = 2x\ln(yz)\,\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{x^2}{y} - 5e^x\right)\overrightarrow{j} + \left(\dfrac{x^2}{z} + 2z\right)\overrightarrow{k}$ y sea C la curva de la figura (7.14). Calcular $\int_C F \cdot dr.$

Solución.

Primero parametrizamos C.

$$\begin{cases} r_1(t) = (0,1,t) \quad \text{con} \quad t \in [1,2], \quad \text{parametriza a} \quad C_1 \\ r_2(t) = (0,t,1) \quad \text{con} \quad t \in [1,3], \quad \text{parametriza a} \quad -C_2 \end{cases}$$

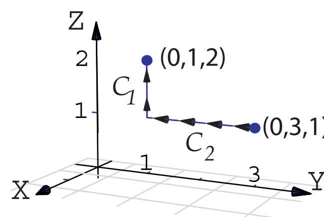


Figura 7.14 Curva $C = C_1 \cup C_2$.

Luego

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr \\
&= \int_1^2 F(r_1(t)) \cdot r_1'(t)\,dt - \int_1^3 F(r_2(t)) \cdot r_2'(t)\,dt \\
&= \int_1^2 [0+0+(2t)\cdot 1]dt - \int_1^3 [0+(-5)\cdot 1+0]\,dt = 13
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.19**

Sea $F(x,y,z) = (x+y)\overrightarrow{i} + (y-z)\overrightarrow{j} + (x+z)\overrightarrow{k}$ y sea C la curva de la figura 7.15. Calcular $\int_C F \cdot dr$.

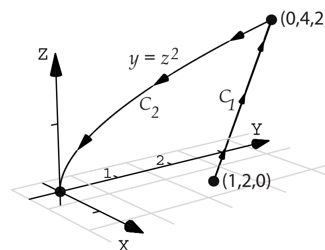


Figura 7.15 Curva $C = C_1 \cup C_2$.

Primero parametrizamos C.

$$\begin{cases} C_1 : & r_1(t) = (1-t, 2+2t, 2t),\ t \in [0,1] \\ C_2 : & r_2(t) = (0, t^2, t),\ t \in [0,2] \end{cases}$$

Para parametrizar el segmento de recta que va desde $A = (1,2,0)$ hasta $B = (0,4,2)$ se usó la fórmula $A + t(B-A)$ con $t \in [0,1]$.

Luego

$$\begin{aligned}
\int_C F\cdot dr &= \int_{C_2} F\cdot dr + \int_{C_1} F\cdot dr \\
&= -\int_0^2 F(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt + \int_0^1 F(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt \\
&= -\int_0^2 \left[0+(t^2-t)\cdot(2t)+(0+t)\cdot(1)\right]dt \\
&\quad + \int_0^1 [(1-t+2+2t)\cdot(-1)+(2+2t-2t)\cdot(2)+(1-t+2t)\cdot(2)]\,dt \\
&= -\int_0^2 \left[t-2t^2+2t^3\right]dt + \int_0^1 [t+3]\,dt = -\frac{7}{6}
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.20**

Calcular $\displaystyle\int_C y^2dx+x^2dy$ donde C es la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (figura 7.16).

Solución.

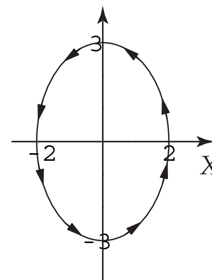


Figura 7.16 Curva C.

Podemos usar la parametrización

$r(\theta)=2\cos\theta\,\overrightarrow{i}+3\,\mathrm{sen}\,\theta\,\overrightarrow{j}$ con $\theta\in[0,2\pi]$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_C y^2dx+x^2dy &= \int_0^{2\pi}(3\,\mathrm{sen}\,\theta)^2(-2\,\mathrm{sen}\,\theta)+(2\cos\theta)^2(3\cos\theta)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} -18\,\mathrm{sen}^3\theta+12\cos^3\theta\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

La integral anterior se calculó usando $\cos^3\theta = (1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta$.

7.7 INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA.

Una condición para que la integral de línea no dependa de la trayectoria que une a A con B es que exista φ tal que $F = \nabla\varphi$ con $\varphi \in C^1$. En este caso podemos calcular la integral de línea usando cualquier camino que una A con B o también, usando el Teorema Fundamental para la integral de línea.

Definición 7.5 *Un conjunto D se dice conexo si todo par de puntos de D se pueden unir con una curva regular a trozos dentro de D.*
Un conjunto D abierto y conexo se dice simplemente conexo *si toda curva cerrada simple C en D, encierra una región que está también en D.*

Definición 7.6 *Sea $F = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}$ de clase C^1 en un conjunto abierto simplemente conexo D del plano. Decimos que F es* conservativo *si*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sea $F = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ de clase C^1 en un conjunto abierto simplemente conexo D del plano. Decimos que F es conservativo *si*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Teorema 7.1 (Teorema Fundamental para integrales de línea) . *Sea $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 donde D es conexo y abierto. Para cualquier curva C regular a trozos en D, con $A = r(a)$ y $B = r(b)$ se tiene*

$$\int_C \nabla\varphi \cdot dr = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Teorema 7.2 (Campos conservativos) *F es conservativo $\Longleftrightarrow$ existe φ de clase C^1 tal que $F = \nabla\varphi$, sobre D.*

Si F es conservativo, existe φ de clase C^1 tal que $\int_C F \cdot dr = \varphi(B) - \varphi(A)$

Si F *es conservativo,* $\int_C F\cdot dr = \int_{C'} F\cdot dr$ *donde* C' *es cualquier curva regular a trozos que une* A *con* B.

F *es conservativo* $\iff$ $\int_C F\cdot dr = 0$ *para* cualquier *curva cerrada* C *en* D.

Observe que si $\int_C F\cdot dr = 0$ para *alguna* curva cerrada C, esto no significa que F conservativo. El la parte 3. del ejemplo 7.18 tenemos un campo con integral nula sobre una elipse pero que no es conservativo.

■ **EJEMPLO 7.21**

Sea $F(x,y,z) = (2x\ln(yz) - 5ye^x)\ \overrightarrow{i} + \left(\frac{x^2}{y} - 5e^x\right)\ \overrightarrow{j} + \left(\frac{x^2}{z} + 2z\right)\ \overrightarrow{k}$ y sea C una curva que une $A=(2,2,1)$ con $B=(3,1,e)$. Calcule $\int_C F\cdot dr$.

Solución.

Notemos que el campo es conservativo. En efecto

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -5e^x + 2x/y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2x/z = \frac{\partial R}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Luego, podemos calcular la integral de línea usando un camino C' que una A con B o también podemos calcular la función potencial φ y usar el teorema fundamental para integrales de línea. En este caso vamos a calcular la integral usando la función potencial φ.

Como $\nabla\varphi = F$ entonces $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, y $\varphi_z = R$.

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= 2x\ln(yz) - 5ye^x \implies \varphi(x,y,z) = \int 2x\ln(yz)\,dx = x^2\ln(yz) - 5ye^x + K(y,z).\\
\varphi_y &= \frac{x^2}{y} - 5e^x\\
\varphi_z &= \frac{x^2}{z} + 2z
\end{aligned}$$

Ahora solo falta determinar $K(x,y)$. Derivando respecto a y tenemos

$$\varphi_y = \frac{x^2}{y} - 5e^x = \frac{x^2}{y} - 5e^x + \frac{\partial K}{\partial y} \implies \frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

con lo que K solo podría ser una función de z, $K = K(z)$. Por lo tanto

$$\varphi(x,y,z) = x^2 \ln(yz) - 5ye^x + K(z)$$

Para determinar $K(z)$ igualamos las derivadas parciales respecto a z

$$\varphi_z = \frac{x^2}{z} + 2z = \frac{x^2}{z} + K'(z) \implies K'(z) = 2z$$

Integrando respecto a z tenemos $K(z) = z^2 + K_1$. Finalmente

$$\varphi(x,y,z) = x^2 \ln(yz) - 5ye^x + z^2 + K_1$$

$$\int_C F \cdot dr = \varphi(B) - \varphi(A) = 8 + 11\,e^2 - 5\,e^3 - 4\,\log(2) \approx -13.9207.$$

■ **EJEMPLO 7.22**

Considere el campo de fuerzas $F(x,y,z) = 4xe^z\,\overrightarrow{i} + \cos(y)\,\overrightarrow{j} + 2x^2e^z\,\overrightarrow{k}$. Sea C la curva de la figura 7.17.

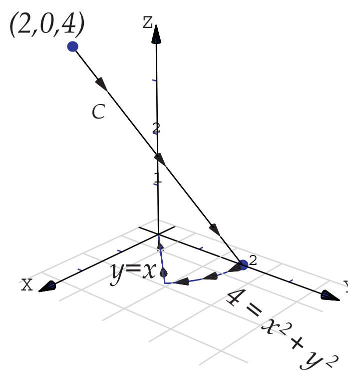


Figura 7.17 Curva C.

Calcule $\int_C F \cdot dr.$

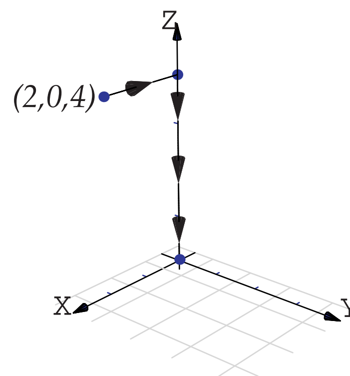
Solución.

Dichosamente no tenemos que integrar sobre la curva C pues F es conservativo. En efecto

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 4xe^z = \frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial R}{\partial y}\end{aligned}$$

En este ejemplo vamos a calcular la integral de dos maneras distintas: usando la función potencial y también usando un camino C'.

Primer manera: con un camino C' que inicia en $(2,0,4)$ y termina en $(0,0,0)$. El camino que hemos escogido se ve en la figura 7.18.



$$\begin{cases} -C_1 & : \quad r_1(t) = (t,0,4) \quad \text{con} \quad t \in [0,2] \\ -C_2 & : \quad r_2(t) = (0,0,t) \quad \text{con} \quad t \in [0,4] \end{cases}$$

Figura 7.18 Curva $C' = C_1 \cup C_2$.

$$\begin{aligned}\int_{C'} F\cdot dr &= \int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr\\ &= -\int_0^2 F(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt - \int_0^4 F(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt\\ &= -\int_0^2 \left[(4te^4)\cdot(1)+0+0\right]dt - \int_0^4 [0+0+0]\,dt\\ &= -\int_0^2 4te^4 dt = -8e^4.\end{aligned}$$

Segunda manera: con la función potencial

$$\begin{aligned}\varphi_x &= 4xe^z \implies \varphi(x,y,z) = \int 4xe^z\,dx = 2x^2e^z + K(y,z).\\ \varphi_y &= \cos(y)\\ \varphi_z &= 2x^2e^z\end{aligned}$$

Derivando respecto a y

$$\varphi_y = \cos(y) = 0 + \frac{\partial K}{\partial y} \implies \frac{\partial K}{\partial y} = \cos(y)$$

de donde, integrando respecto a y, $K(y,z) = \operatorname{sen}(y) + K_1(z)$. Luego

$$\varphi(x,y,z) = 2x^2e^z + \operatorname{sen}(y) + K_1(z).$$

Derivando respecto a z

$$\varphi_z = 2x^2e^z = 2x^2e^z + K_1'(z) \implies K_1'(z) = 0$$

con lo que $K_1(z) = K_1$ (un número.) Finalmente

$$\varphi(x,y,z) = 2x^2e^z + \operatorname{sen}(y) + K_1$$

$$\int_C F\cdot dr = \varphi(0,0,0) - \varphi(2,0,4) = -8e^4.$$

■ **EJEMPLO 7.23**

Ya sabíamos que $\int_C y^2dx + x^2dy = 0$ donde C es la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (figura 7.16). Como sabemos, $F(x,y) = (y^2, x^2)$ no es conservativo. Encuentre otra curva cerrada C para la cual $\int_C y^2dx + x^2dy \neq 0$.

Solución.

Consideremos la curva cerrada C de la figura 7.19.

$$\begin{cases} C_1 & : \quad r_1(t) = (t,0) \quad \text{con} \quad t \in [0,1] \\ C_2 & : \quad r_2(t) = (1,t) \quad \text{con} \quad t \in [0,1] \\ -C_3 & : \quad r_3(t) = (t,t^2) \quad \text{con} \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

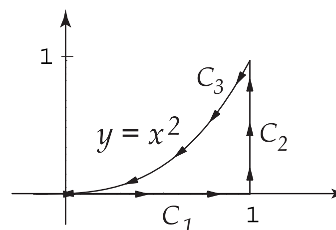


Figura 7.19 Curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

$$\begin{aligned} \int_C y^2dx + x^2dy &= \int_{C_1} y^2dx + x^2dy + \int_{C_2} y^2dx + x^2dy - \int_{C_3} y^2dx + x^2dy \\ &= \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 [t^4 + 2t^3]\,dt = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

7.8 TEOREMA DE GREEN (EN EL PLANO).

El siguiente teorema, llamado "Teorema de Green", aplica para regiones planas limitadas por curvas cerradas y simples regulares a trozos.

Teorema 7.3 (Teorema de Green en el plano) *Sean P y Q campos escalares derivables con continuidad en un conjunto abierto S del plano xy. Sea C una curva simple cerrada regular a trozos y sea D la región encerrada por C (C es el borde). Si D está contenida en S, se tiene la identidad*

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

donde C es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

• Intuitivamente, C es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj si al caminar a lo largo de C la región D está siempre a la izquierda.

■ **EJEMPLO 7.24**

Calcular $\int_C y^2dx + x^2dy$ si C es la curva de la figura 7.20.

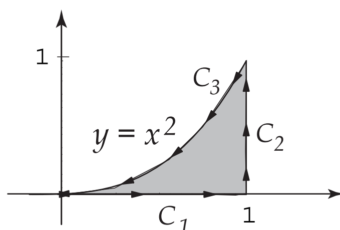


Figura 7.20 Curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Solución.

Como se cumplen las condiciones del teorema de Green podemos poner

$$\begin{aligned}
\int_C y^2dx + x^2dy &= \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} 2x - 2y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 2x^3 - x^4\,dx = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.25**

Calcular $\int_C (x+y)dx + (3x + \arctan y)\,dy$ si C es la curva de la figura 7.21.

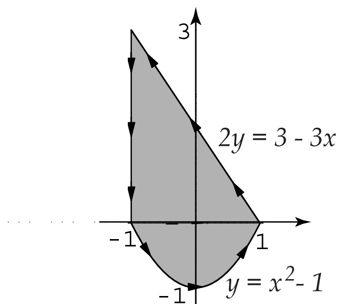


Figura 7.21 Curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Solución.

Como se cumplen las condiciones del teorema de Green podemos poner

$$\begin{aligned}
\int_C (x+y)dx + (3x+\arctan y)\,dy &= \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{\frac{3-3x}{2}} 3-1\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} 5-3x-2x^2\,dx = \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.26**

Calcular $\int_C (x+\text{arcsen}x)dx + (2x+\ln(y^2-3))\,dy$ si C es la curva de la figura 7.22.

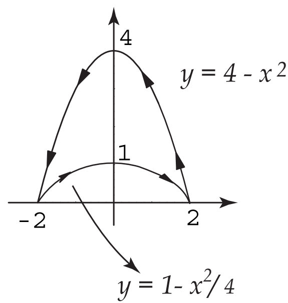


Figura 7.22 Curva $C = C_1 \cup C_2$.

Solución.

Como se cumplen las condiciones del teorema de Green podemos poner

$$\begin{aligned}
\int_C (x+\operatorname{arcsen} x)\,dx + (2x+\ln(y^2-3))\,dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{1-x^2/4}^{4-x^2} 2\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} 6 - \frac{3x^2}{2}\,dx = 16.
\end{aligned}$$

7.9 INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL ÁREA.

Usando el teorema de Green con $P=-y/2$ y $Q=x/2$ obtenemos

$$A_D = \iint_D 1\,dA = \oint_C -\frac{y}{2}\,dx + \frac{x}{2}\,dy$$

Lo cual puede ser conveniente si la integral de línea no ofrece gran dificultad.

Teorema 7.4 *Si D es una región plana limitada por una curva C, cerrada simple, regular a trozos y orientada contra reloj, entonces el área de D viene dada por*

$$A_D = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

■ **EJEMPLO 7.27**

Calcular el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Solución.

Parametrizamos la elipse con $r(t)=a\cos t\,\overrightarrow{i}+b\operatorname{sen} t\,\overrightarrow{j}$ con $t\in[0,2\pi[$. Esta parametrización orienta la elipse contrareloj.

$$A_D = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t + b\operatorname{sen} t\cdot a\cos t\,dt = \frac{ab}{2}2\pi = \pi ab.$$

7.10 PARAMETRIZACIÓN DE UNA SUPERFICIE.

Definición 7.7 *Una superficie parametrizada es una función $r: D\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. La superficie $S=r(D)$ se puede escribir como*

$$r(u,v) = x(u,v)\ \overrightarrow{i} + y(u,v)\ \overrightarrow{j} + z(u,v)\ \overrightarrow{k}$$

• *Si r es de clase C^1, decimos que S es de clase C^1.*

• *Si r es biyectiva, S se dice superficie paramétrica simple.*

EJEMPLO 7.28

Sea $S_1 : x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \leq z \leq h$. S_1 es el cilindro de la figura 7.26. Esta superficie se puede parametrizar de la siguiente manera

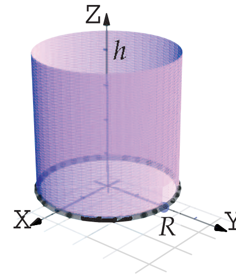


Figura 7.23 Superficie S_1

$$r(\theta,z) = R\cos\theta\ \overrightarrow{i} + R\,\text{sen}\,\theta\ \overrightarrow{j} + z\ \overrightarrow{k},\ \ (\theta,z) \in D = [0,2\pi[\times[0,h].$$

EJEMPLO 7.29

La representación paramétrica de una esfera de radio R, en coordenadas esféricas, es

$$r(\theta,\varphi) = (R\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta,\ R\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ R\cos\varphi),\quad \text{con}\quad (\theta,\varphi) \in [0,2\pi[\times[0,\pi].$$

Caso especial. Una superficie $S:\ z = f(x,y)$ en un dominio D, se puede parametrizar como

$$r(x,y) = x\ \overrightarrow{i} + y\ \overrightarrow{j} + f(x,y)\ \overrightarrow{k},\ \ (x,y) \in D.$$

Observe que D es la proyección de la superficie.

■ **EJEMPLO 7.30**

Considere la superficie S representada en la figura (7.34). Claramente $S:\ z=0$ en el dominio $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$.

S se puede parametrizar como

$$r(x,y)=x\ \overrightarrow{i}+y\ \overrightarrow{j}+0\ \overrightarrow{k},\ \ (x,y)\in D.$$

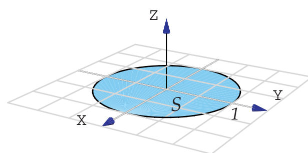


Figura 7.24 Superficie S

■ **EJEMPLO 7.31**

Sea S la porción del paraboloide $z=x^2+y^2$ entre $z=0$ y $z=1$. Entonces S se puede parametrizar como,

$$r(x,y)=x\ \overrightarrow{i}+y\ \overrightarrow{j}+(x^2+y^2)\ \overrightarrow{k},\ \ (x,y)\in D=\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\leq 1\}.$$

7.10.1 Superficies Regulares (suaves).

Sea $S:\ r(u,v)=x(u,v)\ \overrightarrow{i}+y(u,v)\ \overrightarrow{j}+z(u,v)\ \overrightarrow{k}$ con $(u,v)\in D$. Si $x(u,v),y(u,v)$ y $z(u,v)$ son de clase C^1 entonces consideremos los vectores

- $\dfrac{\partial r}{\partial u}=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$

- $\dfrac{\partial r}{\partial v}=\left(\dfrac{\partial x}{\partial v},\dfrac{\partial y}{\partial v},\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$

Definición 7.8 *Sea D abierto y sea $S:\ r:D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ de clase C^1.*
Decimos que S es una superficie regular *en (u,v) si $\dfrac{\partial r}{\partial u}\times\dfrac{\partial r}{\partial v}\neq\overrightarrow{0}$.*
Si S se puede partir en un número finito de elementos regulares se dice regular a trozos.

Observe que si $S: \ z = f(x,y)$ entonces si $r(x,y) = x\ \overrightarrow{i} + y\ \overrightarrow{j} + f(x,y)\ \overrightarrow{k}$ en D con f_x y f_y continuas,

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-f_x, -f_y, 1) \neq \overrightarrow{0}.$$

con lo cual la superficie S es regular en D.

7.11 ÁREA DE UNA SUPERFICIE.

La idea de la definición de área de una superficie paramétrica es la siguiente.

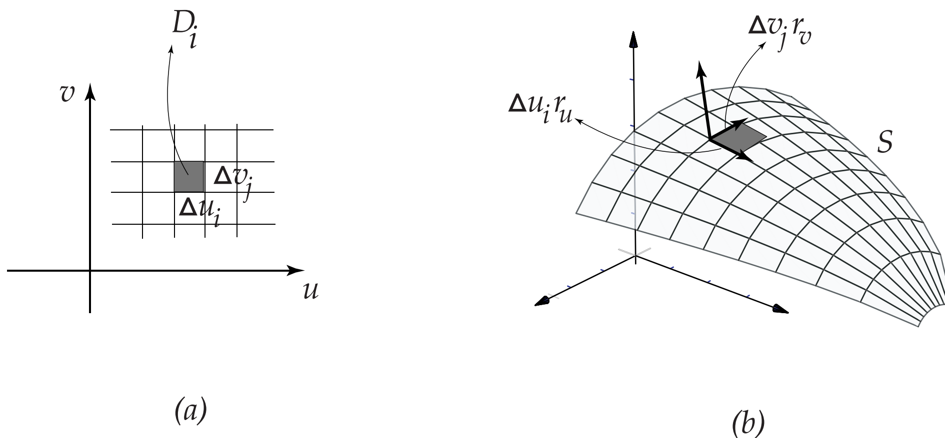


Figura 7.25 Area de una Superficie.

Partimos D en n rectángulos como en 7.25(a). El i-ésimo rectángulo D_i tiene área $\Delta u_i \Delta v_j$. En cada D_i se toma el punto (u_i, v_j) más cercano al origen. En el punto $r(u_i, v_j)$ de la superficie S construimos el plano tangente $T_i : r(u_i, v_j) + t\, r_u(u_i, v_j) + s\, r_v(u_i, v_j),\ t, s \in \mathbb{R}$.

La porción de superficie de S que corresponde a D_i se puede aproximar con un paralelogramo en el plano tangente de lados $\Delta u_i\, r_u$, $\Delta v_j\, r_v$. Como es sabido, este paralelogramo tiene área

$$||\Delta u_i\, r_u \times \Delta v_j\, r_v||$$

Sacando los escalares y sumando el área de todos los paralelogramos tenemos

$$\text{Área de la superficie } S \approx \sum ||r_u \times r_v|| \Delta u_i \Delta v_j$$

Definición 7.9 (Área de una superficie)) *Sea S una superficie regular definida sobre un abierto medible D. Digamos que*

$$S: \ r(u,v) = x(u,v)\ \overrightarrow{i} + y(u,v)\ \overrightarrow{j} + z(u,v)\ \overrightarrow{k} \quad con \quad (u,v) \in D.$$

Entonces, el área de la superficie A_S es

$$A_S = \int\int_D \left|\left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right|\right| dudv$$

Si $S: z = f(x,y)$ entonces $r(x,y) = (x,y,f(x,y))$ y

$$A_S = \int\int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dA$$

- Si $S: F(x,y,z) = 0$ donde S se puede proyectar *uno a uno* sobre una región D del plano xy y si F define a z como función de x e y y si $F_z \neq 0$ entonces $z_x = -F_x/F_z$ y $z_y = -F_y/F_z$ y la fórmula anterior quedaría

$$A_S = \int\int_D \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}\, dA$$

■ **EJEMPLO 7.32**

Calcular el área del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ de altura h, es decir $0 \leq z \leq h$ (figura 7.26).

Solución.

Como ya vimos, la parametrización de esta superficie es

$$r(\theta,z) = R\cos\theta\ \overrightarrow{i} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\ \overrightarrow{j} + z\ \overrightarrow{k}, \ \ (\theta,z) \in D = [0,2\pi[\times[0,h].$$

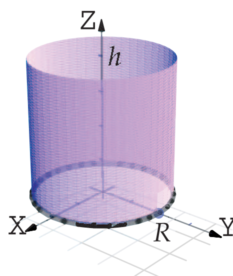


Figura 7.26 Superficie S_1

Luego

- $r_\theta = (-R\operatorname{sen}\theta,\, R\cos\theta,\, 0)$

- $r_z = (0,\, 0,\, 1)$

- $\left|\left|\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial r}{\partial z}\right|\right| = ||(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta, 0)|| = R.$

Ahora, $A_S = \displaystyle\int\int_D \left|\left|\frac{\partial r}{\partial\theta}\times\frac{\partial r}{\partial z}\right|\right| dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^h R\,dz\,d\theta = 2h\pi R.$

■ EJEMPLO 7.33

Calcular el área de la esfera $S:\ x^2+y^2+z^2=R^2.$

Solución.

Solo vamos a calcular el área de la parte superior de la esfera. El área total la obtenemos multiplicando por dos. En este caso $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$

- $z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

- $z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

En coordenadas polares

- $z=\sqrt{R^2-r^2}$

- $z_x^2 = \dfrac{r^2\cos^2\theta}{R^2-r^2}$

- $z_y^2 = \dfrac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{R^2-r^2}$

Observe que las derivadas se indefinen en la frontera del círculo (si $r=R$). La integral se calcula desde 0 hasta b con $0<b<R$. Al final hacemos $b\longrightarrow R.$

$$
\begin{aligned}
A_S &= 2\int\int_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^b \sqrt{1+\frac{r^2\cos^2\theta}{R^2-r^2}+\frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{R^2-r^2}}\,r\,drd\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,drd\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} R^2 d\theta = 4R^2\pi
\end{aligned}
$$

- Para calcular $\displaystyle\int_0^b \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,dr$ hacemos $u=R^2-r^2$, $du=-2r\,dr$. Queda

$$
-\frac{1}{2}\int_{R^2}^{R^2-b^2} \frac{R}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{R}{2}\frac{\sqrt{u}}{1/2}\Big|_{R^2}^{R^2-b^2} = R^2-R\sqrt{R^2-b^2} \longrightarrow R^2 \quad \text{si} \quad b\longrightarrow R.
$$

Nota: Observe que A_S también se pudo calcular con

$$
A_S = \int\int_D \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\,dA
$$

En este caso $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2=0$. Puesto que esta fórmula solo se puede usar si la proyección es *uno a uno* con la superficie, solo podemos considerar la parte superior de la esfera. Pasando a polares, la integral queda igual al cálculo anterior.

■ **EJEMPLO 7.34**

Calcular el área de la superficie de la superficie $S:\ y=4-x^2-z^2$, figura 7.27(a).

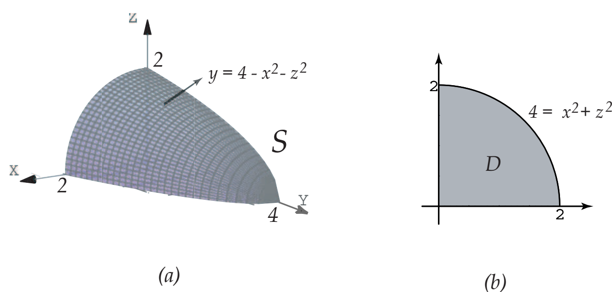


Figura 7.27 Superficie S

Solución.

La proyección sobre xz es el círculo $x^2+z^2=4$.

$$\begin{aligned}
A_S &= \int\int_D \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dA \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2\cos^2\theta+4r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\;r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\;r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left.\frac{\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{12}\right|_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{17\sqrt{17}-1}{12}\,d\theta = \frac{\pi}{2}\,\frac{17\sqrt{17}-1}{12} \approx 9.04423.
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.35**

Calcular el área de la superficie de la superficie $S:\; y+z=6$, figura 7.28(a).

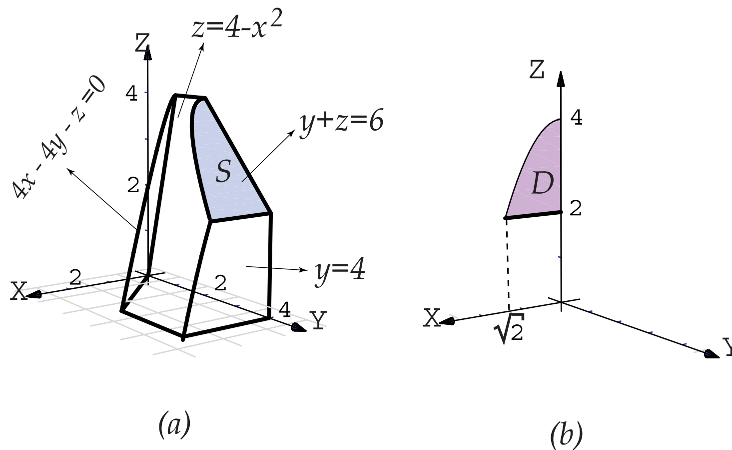


Figura 7.28 Superficie S

Solución.

$S: \ y = 6 - z$. Entonces $y_x = 0$ y $y_z = -1$.

La proyección sobre xz se ve en la figura figura 7.28(b)

$$
\begin{aligned}
A_S &= \int\int_D \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\, dA \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{4-x^2} \sqrt{2}\, dz dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}(4-x^2)\, dx = 20/3
\end{aligned}
$$

7.12 INTEGRAL DE UN CAMPO VECTORIAL SOBRE UNA SUPERFICIE.

Así como el estudio del concepto de trabajo sugirió la definición de integral de línea, la integral de superficie se puede relacionar con un problema tomado de la dinámica de fluidos. Tenemos una corriente de fluido en el espacio con velocidad $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ y densidad (masa por unidad de volumen) $\rho(x,y,z)$ en cada punto (x,y,z). En general, el vector densidad de flujo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{V}(x,y,z)\rho(x,y,z)$$

tiene la misma dirección que la velocidad y su longitud tiene las dimensiones

$$\frac{\text{masa}}{\text{unidad de volumen}} \cdot \frac{\text{distancia}}{\text{unidad de tiempo}} = \frac{\text{masa}}{\text{(unidad de área)(unidad de tiempo)}}$$

(por ejemplo $kg * m/m^3 * s = kg/m^2 * s$) y nos dice cuánta masa de fluido circula por el punto (x,y,z) en la dirección de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$, por unidad de área y de tiempo.

Para sugerir una *definición razonable* de cómo medir la masa total de fluido que atraviesa una determinada superficie S en el tiempo, se considera la superficie S parametrizada por $r(u,v)$ en una región rectangular D. Sea $\overrightarrow{N}$ el vector unitario normal que tiene la misma dirección que el producto vectorial fundamental,

$$\overrightarrow{N} = \frac{\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v} \right\|} \tag{7.1}$$

Para medir la cantidad de fluido que pasa a través de S en la unidad de tiempo y en la dirección de $\overrightarrow{N}$, se descompone el rectángulo D en m subrectángulos $D_1, D_2, \ldots, D_m$ y

sean $S_1, S_2, ..., S_m$ las correspondientes porciones de superficie en S. Llamamos ΔS_k a la k-ésima porción S_k. Si la densidad ρ y la velocidad $\overrightarrow{V}$ son constantes en S_k y S_k es suficientemente plana, el fluido que atraviesa S_k en la unidad de tiempo ocupa un sólido cilíndrico oblicuo con base S_k y eje determinado por el vector velocidad $\overrightarrow{V}$.

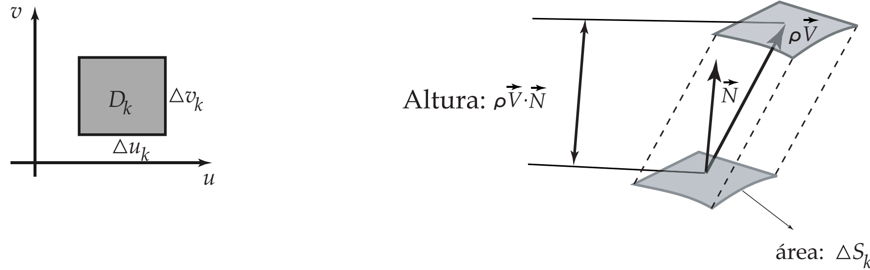


Figura 7.29 El fluido sobre S_k ocupa un sólido cilíndrico.

El fluido sobre S_k ocupa un sólido cilíndrico de volumen (base por altura)

$$\Delta S_k \, \rho \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{N} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} \, \Delta S_k \approx \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} \left|\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right|\right| \Delta u_k \, \Delta v_k$$

Esto sugiere que la suma $\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} \, \Delta S_k$ puede ser una aproximación aceptable de la masa total de fluido que atraviesa S en la unidad de tiempo.

Si ponemos $f(x,y,z) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}$, tenemos la siguiente definición

Definición 7.10 *Sea D un abierto medible y S una superficie regular parametrizada por la función $r(u,v)$, de clase C^1 en $\overline{D}$, donde $(u,v) \in D$, de modo que $\left|\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right|\right| > 0$ para todo $(u,v) \in D$, r es una biyección entre D y S.*
Sea $f(x,y,z)$ una función definida y acotada sobre $\overline{S}$. Se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\int\int_S f(x,y,z) \, dS = \int\int_D f(r(u,v)) \left|\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right|\right| dudv.$$

- Bajo ciertas condiciones generales, la integral de superficie es independiente de la parametrización (ver [4]).

- **Área de una superficie.**

Si $f(x,y,z) = 1$ entonces

$$\int\int_S dS = \int\int_D \left|\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right|\right| du\,dv$$

Si $S:\ z = f(x,y)$ con f de clase C^1 sobre $\overline{D}$, se puede parametrizar S con $r(x,y) = (x,y,f(x,y))$ y entonces

$$\int\int_S g(x,y,z)\,dS = \int\int_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy.$$

Si $S = S_1 \cup \ldots \cup S_m$ es la unión finita de superficies parametrizadas que se intersecan a lo sumo en curvas que forman parte de sus fronteras entonces,

$$\int\int_S g(x,y,z)dS = \sum_i^m \int\int_{S_i} g(x,y,z)dS$$

- **Integral de Flujo.**

Si F es la densidad de flujo de una corriente de fluido y N es el vector unitario normal a S definido por 7.1, entonces la masa total de fluido que pasa por S por unidad de tiempo en la dirección de N es

$$\int\int_S F\cdot N\,dS = \int\int_D F(r(u,v))\cdot N(r(u,v))\left|\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right|\right| du\,dv$$

Como consecuencia tenemos que si $S:\ z = f(x,y)$ con f de clase C^1 sobre $\overline{D}$, se puede parametrizar S con $r(x,y) = (x,y,f(x,y))$ y entonces

$$\int\int_S F\cdot N\,dS = \int\int_D F(x,y,z)\cdot(-f_x,-f_y,1)\,dx\,dy$$

■ **EJEMPLO 7.36**

Calcular $\displaystyle\int\int_S z+2x+\frac{4}{3}y\,dS$ con S la parte del plano $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ situada en el primer octante.

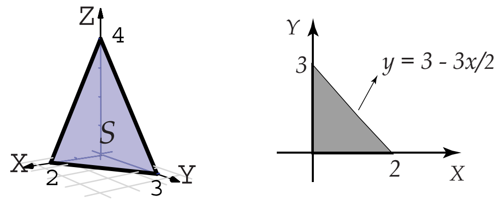


Figura 7.30 Superficie S

Solución.

$S: \; z = 4 - 2x - \dfrac{4}{3}y$. Entonces $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{61}/3$. Luego,

$$\begin{aligned}\iint_S z + 2x + 4/3y\, dS &= \int_0^2 \int_0^{3-3x/2} \left(4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y\right) \frac{\sqrt{61}}{3}\, dydx \\ &= \int_0^2 \int_0^{3-3x/2} \frac{4\sqrt{61}}{3}\, dydx = 4\sqrt{61}.\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.37**

Sea $a > 0$. Calcular $\displaystyle\iint_S \frac{1}{a^2 + z^2}\, dS$ con S el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ limitado por los planos $z = 0$ y $z = h$.

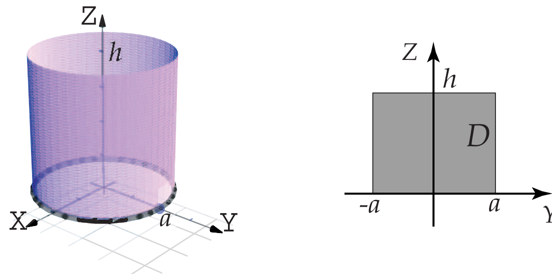


Figura 7.31 Cilindro S

Solución.

Vamos a resolver esta integral de dos maneras, usando la ecuación $x = g(y,z)$ y usando una parametrización de la superficie.

Primera manera: usando la ecuación $x^2+y^2=a^2$. Recordemos que la parametrización debe ser uno a uno entre D y S!.

El cilindro es la unión de los cilindros $x=\pm\sqrt{a^2-y^2}$. Cada ecuación define una parametrización uno-uno (por separado). Como $\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}$ en ambos casos y como $\dfrac{1}{a^2+z^2}$ no se ve afectado, en +vez de calcular dos integrales, podemos calcular la integral como dos veces la integral sobre el cilindro $x=\sqrt{a^2-y^2}$.

$$\begin{aligned}
\int\int_S \frac{1}{a^2+z^2}\,dS &= 2\int\int_D \frac{1}{a^2+z^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dydz\\
&= 2\int_{-a}^{a}\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy\int_0^h\frac{1}{a^2+z^2}\,dz\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2a\arcsen\left(\frac{y}{a}\right)\Big|_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}\cdot\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{z}{a}\right)\Big|_0^h = 2\pi\arctan\left(\frac{h}{a}\right).
\end{aligned}$$

Segunda manera: usando la parametrización uno-uno

$$r(\theta,z)=a\cos\theta\,\overrightarrow{i}+a\operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{j}+z\,\overrightarrow{k},\ \ (\theta,z)\in D=[0,2\pi[\times[0,h].$$

Luego

- $r_\theta=(-a\operatorname{sen}\theta,\,a\cos\theta,\,0)$
- $r_z=(0,\,0,\,1)$
- $\left|\left|\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial r}{\partial z}\right|\right| = ||(a\cos\theta,a\operatorname{sen}\theta,0)|| = a.$
- $g(r(\theta,z))=\dfrac{1}{a^2+z^2}$ (no se ve afectada).

Ahora, $\displaystyle\int\int_D\frac{1}{a^2+z^2}\left|\left|\frac{\partial r}{\partial\theta}\times\frac{\partial r}{\partial z}\right|\right|dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^h\frac{a}{a^2+z^2}\,dz\,d\theta = 2\pi\arctan\left(\frac{h}{a}\right).$

Note que usando la parametrización no tenemos problemas de singularidades.

■ **EJEMPLO 7.38** $(*)$

Calcular $\displaystyle\int\int_S \ln z\,dS$ con S el casquete de esfera $x^2+y^2+z^2=1,\ \frac{1}{2}\le z\le 1.$

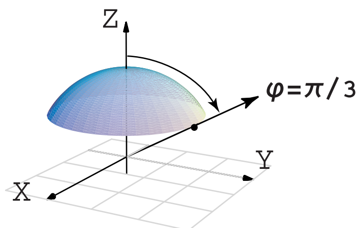


Figura 7.32 Casquete.

Solución.

Vamos a usar una parametrización del casquete de la esfera basada en en coordenadas esféricas. Observe que los parámetros son θ y φ. En este caso, $r = 1$.

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y &= \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z &= \cos\varphi \end{aligned}$$

$$r(\theta,\varphi) = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ \cos\varphi), \quad \text{con} \quad (\theta,\varphi) \in [0,2\pi[\times[0,\pi/3].$$

El valor $\varphi = \pi/3$ se obtiene de resolver $z = 1\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Luego

- $r_\theta = (-\sin\theta\,\sin\varphi, \cos\theta\,\sin\varphi, 0)$

- $r_\varphi = (\cos\theta\,\cos\varphi, \cos\varphi\,\sin\theta, -\sin\varphi)$

- $\left|\left|\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\right|\right| = |\operatorname{sen}\varphi|.$

Ahora,

$$\int\int_S \ln z\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \ln(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi d\theta = \pi\,(\ln 2 - 1)$$

EJEMPLO 7.39

Calcular $\displaystyle\int\int_S \frac{z+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dS$ con S la porción de la superficie $z=4-x^2$ que se muestra en la figura 7.33.

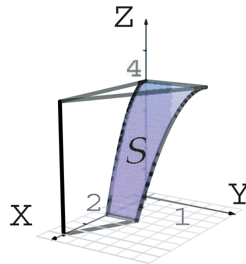


Figura 7.33 Superficie S

Solución.

$$\int\int_S \frac{z+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dS = \int_0^2\int_0^{2-x/2} 4-x^2+x^2\,dydx \;=\; 12.$$

EJEMPLO 7.40

Calcular $\displaystyle\int\int_S F\cdot N\,dS$ si $F(x,y,z)=(z+1)\,\overrightarrow{k}$ y S es el círculo $x^2+y^2=1$.

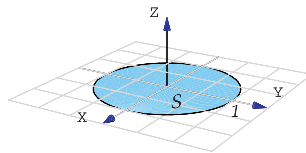


Figura 7.34 Superficie S

Solución.

La superficie S tiene ecuación $z=0$ y coincide con su proyección D que es el círculo de radio 1. Por lo tanto $N=(0,0,1)$.

$$\begin{aligned}\int\int_S F\cdot N\,dS &= \int\int_D F(x,y,z)\cdot(-f_x,-f_y,1)\,dxdy\\ &= \int\int_D (0,0,1)\cdot(0,0,1)\,dydx\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 1\,r\,drd\theta=\pi\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.41**

Calcular $\int\int_S F\cdot N\,dS$ si $F(x,y,z)=(z+1)\overrightarrow{k}$ y S es la superficie $z=2+y$ con $x^2+y^2=1$.

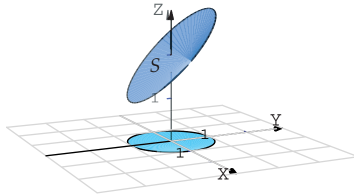


Figura 7.35 Superficie S y su proyección

Solución.

La superficie tiene ecuación $z=2+y$. D es el círculo de radio 1. Por lo tanto $N=(0,-1,1)$.

$$\begin{aligned}\int\int_S F\cdot N\,dS &= \int\int_D F(x,y,2+y)\cdot(-f_x,-f_y,1)\,dxdy\\ &= \int\int_D (0,0,3+y)\cdot(0,-1,1)\,dydx\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3+r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{6+\mathrm{sen}(\theta)}{4}\,d\theta=3\pi.\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.42**

Calcular $\int\int_S F\cdot N\,dS$ si $F(x,y,z)=(z+1)\overrightarrow{k}$ y S el cilindro $x^2+y^2=1$ limitado por el plano $z=2+y$ como se ve en la figura 7.36.

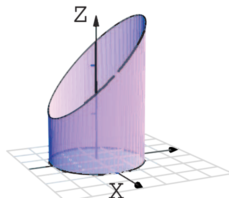


Figura 7.36 Superficie S.

Solución.

En este caso S es la unión de dos superficies con ecuaciones $x=\pm\sqrt{1-y^2}$. Solo hay que notar que en cualquier caso, $F\cdot(1,-x_y,-x_z)=(0,0,z+1)\cdot(1,\pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},0)=0$. Por lo tanto $\int\int_S F\cdot N\,dS=0$.

7.12.1 Superficies Orientables.

Sea S una superficie y $r(u,v)$ una parametrización. Los vectores normales a S, en (u,v), puede escogerse entre dos vectores unitarios opuestos

$$N(u,v)=\pm\frac{\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}}{\left|\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|\right|}$$

En el caso de que $S:\ z=f(x,y)$, si $r(x,y)=(x,y,f(x,y))$ y entonces

$$N=\pm\frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$$

Si la superficie tiene dos “lados” (dos “caras”), el signo hace que cada vector normal esté en un lado u otro de la superficie. Este hecho se usa para “orientar” una superficie. Orientar una superficie significa escoger un signo para N, una cara de la superficie es caracterizado N y la otra cara por $-N$.

En el caso de una esfera, el vector N (con signo negativo) apunta al *exterior* y el otro apunta al interior (figura 7.37).

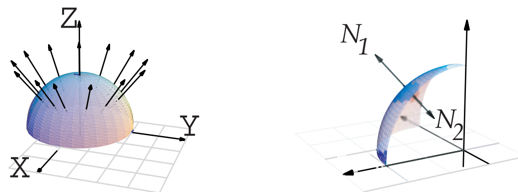


Figura 7.37 Esfera. N apunta al exterior. $-N$ apunta al interior.

Definición 7.11 *Si en cada punto (x,y,z) de la superficie regular S es posible asociar un vector unitario $N(x,y,z)$ de tal manera que como función, N sea continua sobre toda la superficie S, entonces se dice que S es* orientable.

Como decíamos, la definición supone que la superficie tiene dos lados. Uno de los lados queda determinado por la función continua $N(x,y,z)$ sobre S y el otro lado por la normal de signo contrario.

Hay superficies de una sola cara, como la *banda de Möbius,* que no son orientables. En la figura 7.38, tenemos una banda de Möbius. Note que la escogencia de N no orienta la banda, es decir la presencia de los vectores N "arriba" y "abajo" de la banda, muestran que hay una sola cara.

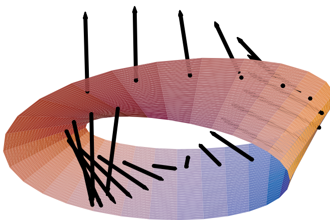


Figura 7.38 Banda de Möbius.

En las integrales de flujo que hemos calculado, hemos usado el vector normal unitario fundamental. No siempre este es el vector que se elige para los cálculos. Algunos teoremas requieren superficies orientadas con vectores normales unitarios hacia *el exterior.* Para dar una idea gráfica de que significa esto, veamos la figura 7.39, tenemos un sector de la superficie $S:\ x^2+y^2+z^2=1$.

$N_1 = \dfrac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}$ es el vector normal unitario exterior a S.

$N_2 = \dfrac{(-2x,-2y,-2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}$ es el vector normal unitario hacia adentro.

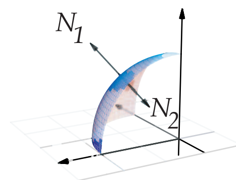


Figura 7.39 N_1 es exterior a S.

7.13 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA.

Teorema 7.5 (Teorema de la Divergencia) *Sea Q un sólido limitado por una superficie orientable S y sea N la normal unitaria exterior a S. Si F es un campo vectorial de clase C^1 sobre Q entonces*

$$\iiint_Q divF\, dxdydz = \iint_S F\cdot N\, dS$$

donde $divF = P_x + Q_y + R_z$ si $F = (P,Q,R)$.

■ **EJEMPLO 7.43**

Calcular $\iint_S F\cdot N\,dS$ si N es el vector unitario exterior, $F(x,y,z) = (z+1)\,\overrightarrow{k}$ y S es la frontera del sólido Q limitado por el cilindro $x^2+y^2=1$, el plano $z=2+y$ y $z=0$, como se ve en la figura 7.40.

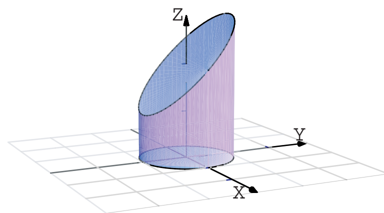


Figura 7.40 Superficie S.

Solución.

En vez de calcular la integral sobre cada una de las tres superficies que conforman la frontera de Q (ver los ejemplos 7.40,7.41 y 7.42), usamos el teorema de la divergencia.

- $F(x,y,z) = (0,0,z+1)$.

- $\text{div}F = 0+0+1 = 1$.

Proyectando sobre el plano xy tenemos

$$\begin{aligned}
\int\int_S F\cdot N\,dS &= \int\int\int_Q \text{div}F\,dzdydx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2+y} 1\,dzrdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2+r\,\text{sen}\,\theta)rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} r^2+\frac{r^3\,\text{sen}(\theta)}{3}\Big|_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 1+\frac{\text{sen}(\theta)}{3}d\theta = 2\pi
\end{aligned}$$

La importancia de que N se exterior a Q.

Consideremos los ejemplos 7.40, 7.41 y 7.42. El cálculo de la integral de flujo se hizo siempre con $N = (-f_x,\ -f_y,\ 1)$. Pero este vector no siempre es exterior a Q. En el caso de la superficie S_1 (figura7.41), este vector *no es exterior.*

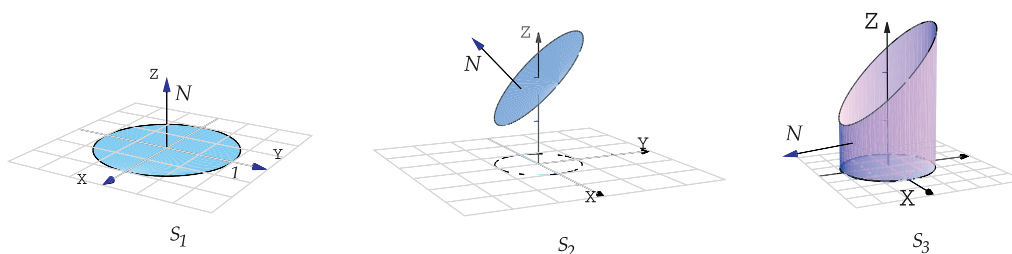


Figura 7.41 Superficie $S = S_1+S_2+S_3$

El resultado es

$$\int\int_S F\cdot N\,dS = \int\int_{S_1} F\cdot N\,dS + \int\int_{S_2} F\cdot N\,dS + \int\int_{S_3} F\cdot N\,dS = \pi+3\pi+0 \neq \int\int\int_Q \text{div}F\,dzdydx = 2\pi$$

En cambio, si tomamos N exterior todo el tiempo a Q, en S_1 deberíamos tomar $N = (f_x,\ f_y,\ -1)$: En este caso,

$$\int\int_S F\cdot N\,dS == -\pi+3\pi+0 \ = \ \int\int\int_Q \text{div}F\,dzdydx = 2\pi$$

■ **EJEMPLO 7.44**

Calcular $\int\int_S F\cdot N\,dS$ si N es el vector unitario exterior, $F(x,y,z) = x\ \overrightarrow{i} + y\ \overrightarrow{j} + z\ \overrightarrow{k}$ y S es la frontera del sólido Q comprendido entre las superficies $z = 10-x^2-y^2$ y $z = 2+x^2+y^2$ (figura 7.42).

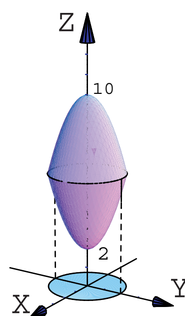


Figura 7.42 Superficie S.

Solución.

Podemos usar el teorema de la divergencia.

- La proyección del sólido sobre el plano xy es un círculo de radio 2 pues
$$z = 10-x^2-y^2 \cap z = 2+x^2+y^2 \implies 4 = x^2+y^2.$$

- $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

- $\text{div}F = 1+1+1 = 3$.

$$\begin{aligned}\int\int_S F\cdot N\,dS &= \int\int\int_Q \text{div}F\,dzdydx \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2+r^2}^{10-r^2} 3\,dzrdrd\theta \\ &= 48\pi\end{aligned}$$

EJEMPLO 7.45

Calcular $\int\int_S F \cdot N\, dS$ si N es el vector unitario exterior, $F(x,y,z) = y\cos x\,\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}y^2\,\text{sen}\,x\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ y S es la frontera del sólido Q comprendido entre las superficies $z = 1+y$ y $x^2+y^2 = 1$ (figura 7.43).

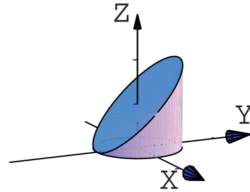


Figura 7.43 Superficie S.

Solución.

Podemos usar el teorema de la divergencia.

• La proyección del sólido sobre el plano xy es un círculo de radio 1.

• $F(x,y,z) = y\cos x\,\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}y^2\,\text{sen}\,x\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

• $\text{div}F = -y\,\text{sen}\,x + y\,\text{sen}\,x + 1 = 1$.

$$\begin{aligned}
\int\int_S F \cdot N\, dS &= \int\int\int_Q \text{div}F\, dzdydx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+y} 1\, dzrdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r\,\text{sen}\,\theta)r\,drd\theta \\
&= \pi
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7.46

Sea Q el sólido limitado por las superficies $S_1\,:\,z = \text{sen}(xy)$, $S_2\,:\,x = \dfrac{\pi}{2}$ y $S_3\,:\,y = x$ (figura 7.49).

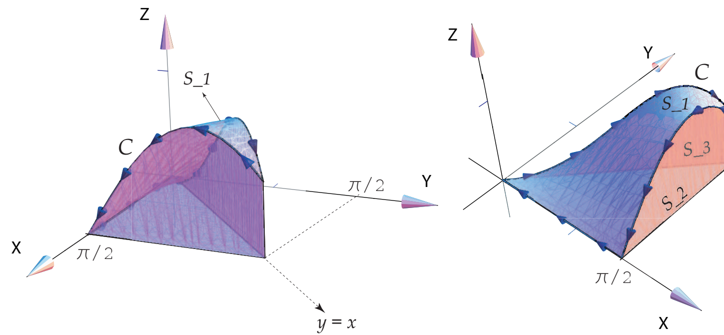


Figura 7.44 Sólido Q

Sea S la frontera del sólido Q y N el vector normal unitario y exterior a Q. Calcule $\int\int_S F\cdot N\,dS$ si $F=\left(\dfrac{x^3}{3},\, z,\, yx\right)$.

Solución.

Podemos usar el teorema de la divergencia.

• La proyección del sólido sobre el plano XY es el triángulo $0\le x\le \pi/2$ y $0\le y\le x$.

$\text{div}F = x^2$

$$\begin{aligned}
\int\int_S F\cdot N\,dS &= \int\int\int_Q \text{div}F\,dzdydx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\int_0^{\text{sen}(xy)} x^2\,dzdydx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x} x^2\,\text{sen}(xy)dydx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x - x\cos\left(x^2\right)\,dx\\
&= \frac{1}{8}\left(\pi^2 - 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

7.14 TEOREMA DE STOKES (TEOREMA DE GREEN EN EL ESPACIO).

Rotacional de un campo vectorial.

Sea $F = (P, Q, R)$ entonces

$$\text{rot}F = (R_y - Q_z,\, P_z - R_x,\, Q_x - P_y).$$

Orientación positiva de C respecto a N.

El teorema de Stokes (o de Green el el espacio) nos permite calcular una integral de línea sobre una curva cerrada en el espacio, como una integral de superficie (la superficie encerrada por la curva) si el vector normal unitario $N/||N||$, en la integral de superficie, se escoge de tal manera que si caminamos sobre la curva, en el lado de la superficie en la que está el vector normal, la superficie va quedando hacia nuestra izquierda.

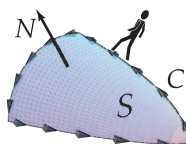


Figura 7.45 Orientación positiva de C respecto a N.

En este caso decimos que N se escogió de tal manera que C tiene orientación positiva respecto a N.

Teorema 7.6 (Teorema de Stokes) *Sea S una superficie orientable, regular a trozos y limitada por una curva C cerrada y regular a trozos. Si $F = (P, Q, R)$ es de clase C^1 sobre S entonces*

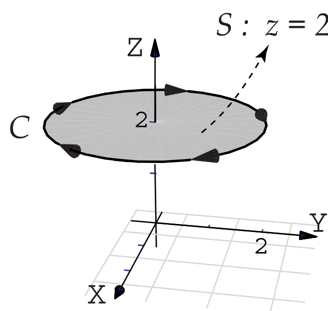
$$\int_C F \cdot dr = \int\int_S rotF \cdot N\, dS$$

si N es elegido de tal manera que C tiene orientación positiva respecto a N.

El teorema de Stokes se puede extender a dos o más curvas cerradas.

■ **EJEMPLO 7.47**

Sea S la superficie de ecuación $z = 2$, tal y como se muestra en la figura.



La curva C es el borde S. Una parametrización para C es

$$r(t) = 2\cos t\; i \;-\; 2\,\mathrm{sen}\,t\; j + 2\,k, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si $F(x,y,z) = 3y\,i - xz\,j + yz^2 k$,

a.) Calcular $\int_C F \cdot dr$ usando la definición de integral de línea.

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= \int_C F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (6\,\mathrm{sen}\,t, 4\cos t, 8\,\mathrm{sen}\,t) \cdot (2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t, 0)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} 12\,\mathrm{sen}^2 t + 8\cos^2 t\,dt = 20\pi
\end{aligned}$$

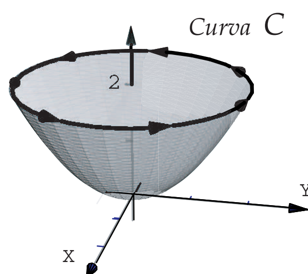
b.) Utilice el Teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$.

La superficie es $S:\ z = 2$ y la proyección es el círculo $x^2 + y^2 = 4$. El vector N se debe tomar de acuerdo a la regla de la mano derecha: $N = -(0,0,1)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= \iint_S \mathrm{rot}F \cdot N\,dS = \iint_{R_{xy}} (x+z^2, 0, -3-z) \cdot (0,0,-1)\,dA = \iint_{R_{xy}} 3 + z\,dA \\
&= \iint_{R_{xy}} 5\,dA, \quad \text{pues} \quad S:\ z = 2 \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 5r\,dr\,d\theta = 20\pi
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.48**

Utilice el teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$ donde $F(x,y,z) = 3yi - xzj + yz^2 k$ y C es la curva de intersección entre el paraboloide $2z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$, tal y como se muestra en la figura.



¿Cuál superficie escoger, el paraboloide o el plano?. De acuerdo al Teorema de Stokes, se puede escoger cualquiera de las dos. La más simple es el plano $z=2$.

Si $S:\ z-2=0$ entonces $N=\pm(0,0,1)$. ¿Cuál signo se escoge?. Las integrales $\int_C F\cdot dr$ y $\iint_S \text{rot}F\cdot N\,dS$ tienen el mismo valor si N se escoge de acuerdo a la regla de la mano derecha (sino, difieren en el signo), en este caso particular y de acuerdo a la orientación de C, el que se debe escoger es $N=(0,0,1)$.

$$\begin{aligned}
\int_C F\cdot dr &= \iint_S \text{rot}F\cdot N\,dS\\
&= \iint_{R_{xy}} (z^2+x,\ 0,\ -z-3)\cdot(0,0,1)\,dA, \text{ la proyección } R_{xy} \text{ es el círculo } x^2+y^2=4,\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2-3)r\,dr\,d\theta\\
&= -10\,\theta\,\Big|_0^{2\pi} = -20\pi.
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.49**

Sea $F(x,y,z)=(x+y,2x-z,y+z)$ y S la porción del plano $3x+2y+z=6$ en el primer octante (figura 7.46). Sea C la frontera de la superficie S. Calcular $\int_C F\cdot dr$.

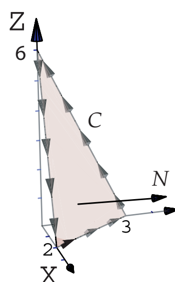


Figura 7.46 Curva C.

Solución.

• La ecuación de la superficie S es $3x+2y+z=6$. El vector normal adecuado para que se cumpla la identidad del teorema de Stokes es $N=(-z_x,-z_y,1)=(3,2,1)$, como se ve en la figura 7.46. *Observe que no necesitamos hacerlo unitario por la cancelación de normas en la integral de superficie.*

• $\text{rot}F=(2,0,1)$.

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot dr &= \int\int_S \text{rot}F\cdot\frac{N}{||N||}\,dS\\ &= \int\int_D (2,0,1)\cdot(3,2,1)\,dydx\\ &= \int_0^2\int_0^{3-3/2x} 7\,dydx = 21.\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.50**

Calcular $\int_C F\cdot dr$ si $F(x,y,z)=(yz,x,z^2)$. C es la curva que aparece en la figura 7.47.

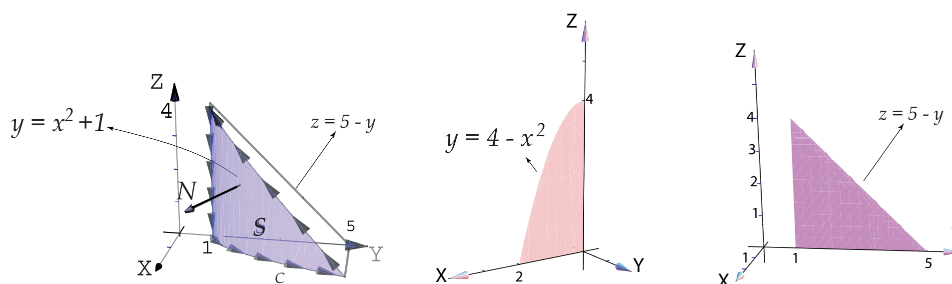


Figura 7.47 Sólido Q, superficie S y sus proyecciones y curva C

Solución.

Vamos a resolver el problema de dos maneras: Proyectando S sobre XZ y proyectando S sobre YZ.

Proyectando S sobre el plano XZ.

Un vector normal es $N=\pm(-y_x,1,-y_z)$.

$S: y = x^2 + 1$. El normal adecuado es $N = (y_x, -1, y_z) = (2x, -1, 0)$. En la figura 7.47 aparece el vector $N(1,2,2) = (2,-1,0)$.

• $\text{rot}F = (0, y, 1-z)$.

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int\int_S \text{rot}F \cdot \frac{N}{||N||}\, dS \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} -x^2 - 1\, dzdx = -48/5.\end{aligned}$$

Proyectando S sobre el plano YZ.

Un vector normal es $N = \pm(1, -x_y, -x_z)$.

$S: x = \sqrt{y-1}$. El normal adecuado es $N = (1, \dfrac{-1}{2\sqrt{y-1}}, 0)$

• $\text{rot}F = (0, y, 1-z)$.

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int\int_S \text{rot}F \cdot \frac{N}{||N||}\, dS \\ &= \int_1^5 \int_0^{5-y} (0, y, 1-z) \cdot (1, -\frac{1}{2\sqrt{y-1}}, 0) dzdy = -48/5. \\ &= \int_1^5 \int_0^{5-y} -\frac{y}{2\sqrt{y-1}} dzdy = -48/5.\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.51**

Calcular $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ si $F(x,y,z) = (xy, z, y)$ y C es la curva de la figura 7.48.

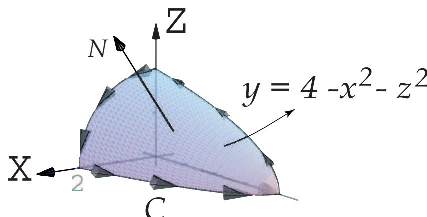


Figura 7.48 Curva C.

Solución.

• La ecuación de la superficie S es $y = 4 - x^2 - z^2$. Vamos a proyectar sobre el plano xz.

El vector normal adecuado para que se cumpla la identidad del teorema de Stokes es

$$N = (-y_x, 1, -y_z) = (2x, 1, 2z)$$

Para ver esto, tome un punto de la superficie S, digamos $(1,2,1)$. En este caso $N(1,2,1) = (2,1,2)$. Al trasladarlo a la superficie, vemos que es el vector adecuado.

• $\text{rot}F = (0,0,-x)$.

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \iint_S \text{rot}F \cdot \frac{N}{||N||}\, dS \\ &= \iint_D (0,0,-x)\cdot(2x,1,2z)\, dz dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} -2xz\, dz dx = -4.\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.52**

Sea Q el sólido limitado por las superficies $S_1 : z = \text{sen}(xy)$, $S_2 : x = \dfrac{\pi}{2}$ y $S_3 : y = x$ (figura 7.49).

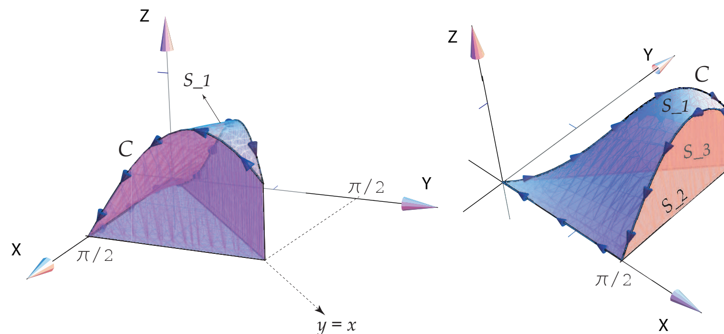


Figura 7.49 Sólido Q

Calcule $\int_C F \cdot dr$ si $F = (z,\, x,\, x)$ y C es la frontera de la superficie S_1.

Solución.

$\text{rot}\, F = (0,0,-1)$ y un vector normal adecuado es $(y\cos(xy),\ x\cos(xy),\ -1)$.

Proyectamos sobre el plano XY. La región de integración es el triángulo $0 \leq x \leq \pi/2$ y $0 \leq y \leq x$.

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \iint_{S_1} rot F \cdot N\, dS \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^x -1\, dy dx \\ &= \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

7.15 EJEMPLOS ADICIONALES.

■ **EJEMPLO 7.53**

Determine el área de la superficie S de ecuación $z = x^2 + y^2$ que se encuentra limitada por los planos $z = 4,\ z = 1,\ y = x$ y el plano $y = 0,$ tal y como se muestra en la figura 7.50.

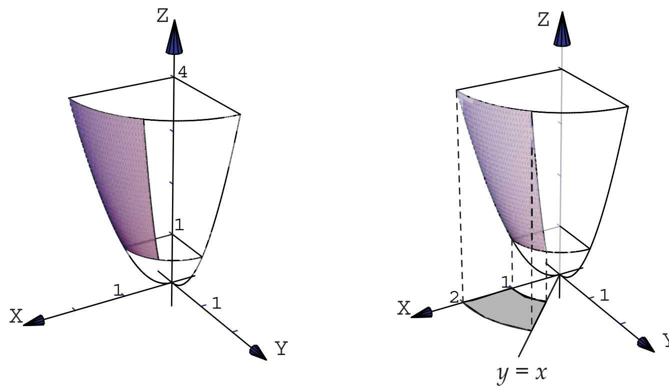


Figura 7.50 Superficie S

Solución.

Vamos a proyectar sobre el plano xy. Como se ve en la figura 7.50, la proyección está entre los círculos $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=2$ con $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Entonces

$$\begin{aligned} A_S &= \int\int_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA \\ &= \int\int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dydx \\ &= \int_0^{\pi/4}\int_1^2 \sqrt{4r^2+1}\,r\,drd\theta, \quad \text{(sustitución: } u=4r^2+1) \\ &= \frac{\left(-5\sqrt{5}+17\sqrt{17}\right)\pi}{48} \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.54**

Sea $F(x,y,z) = (yz^2 - \operatorname{sen}x \operatorname{sen}(\pi-y),\, xz^2 - \cos(\pi-y)\cos x,\, 2xyz)$ un campo vectorial dado y sea C la curva que une los puntos $(\pi,0,0)$ con $(0,\pi,0)$, como se ve en la figura 7.51.

1. Verifique que F es conservativo.

2. Calcule $\int_C F\cdot dr$ usando la función potencial.

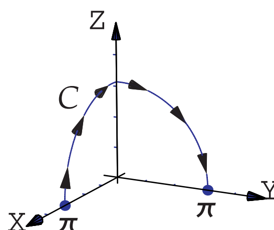


Figura 7.51 Curva C

Solución.

• $F=(P,Q,R)$ es conservativo pues $P_y = z^2+\operatorname{sen}x\cos(\pi-y) = Q_x$, $R_y = 2xz = Q_z$ y $R_x = 2yz = P_z$.

• La función potencial es $\phi(x,y,z) = xyz^2+\cos(x)\operatorname{sen}(\pi-y)+K$. Por lo tanto

$$\int_C F \cdot dr = \phi(0,\pi,0) - \phi(\pi,0,0) = 0$$

■ EJEMPLO 7.55

Calcule $I = \int\int_S F \cdot N\,dS$ donde F es el campo vectorial dado por $F(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i} - x\,\overrightarrow{j} + 8z\,\overrightarrow{k}$ y S la parte de la esfera de ecuación $x^{+}y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ como se observa en la figura 7.52.

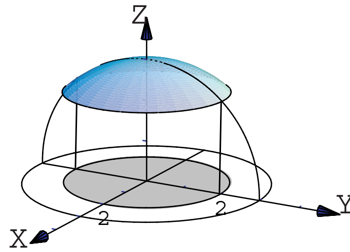


Figura 7.52 Superficie S

Solución.

Vamos a proyectar sobre el plano xy. La proyección es el círculo $x^2 + y^2 = 2$.

• Como $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ entonces podemos poner $N = \dfrac{(-x/z,\,-y/z,\,1)}{||(-x/z,\,-y/z,\,1)||}$. Luego

$$F \cdot N\,dS = (y,-x,8z) \cdot \frac{(-x/z,\,-y/z,\,1)}{||(-x/z,\,-y/z,\,1)||}||(-x/z,\,-y/z,\,1)||\,dydx\,=\,8z\,dydx$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int\int_D 8z\,dydx \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 8\sqrt{9-r^2}\,r\,drd\theta \\ &= \frac{16\pi(5^{3/2} - 9^{3/2})}{-3} \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.56**

Calcule $I = \int_C x\,dx + z\,dy + dz$. La curva $C = C_1 \cup C_2$ es la curva que aparece en la figura 7.53. C_1 es un trozo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y C_2 es el segmento que va de $(0,1,0)$ a $(2,2,3)$.

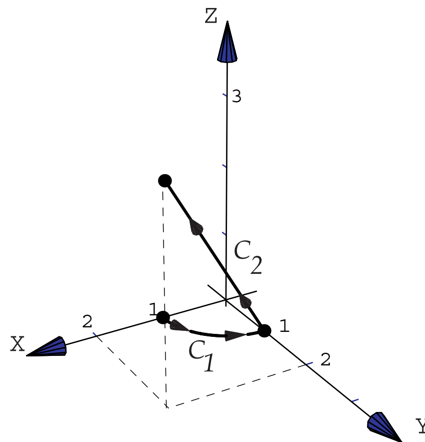


Figura 7.53 Curva C

Solución.

Parametrizamos las curvas,

$C_1:\ r_1(t) = \cos t\ \overrightarrow{i} + \operatorname{sen} t\ \overrightarrow{j} + 0\ \overrightarrow{k}$ con $t \in [0, \pi/2]$.

$C_2:\ r_2(t) = (0,1,0) + t[(2,2,3) - (0,1,0)] = 2t\ \overrightarrow{i} + (t+1)\ \overrightarrow{j} + 3t\ \overrightarrow{k},\ \ t \in [0,1]$.

Luego,

$$\begin{aligned} \int_C x\,dx + z\,dy + dz &= \int_{C_1} x\,dx + z\,dy + dz + \int_{C_2} x\,dx + z\,dy + dz \\ &= \int_0^{\pi/2} -\cos t \operatorname{sen} t\,dt + \int_0^1 4t + 3t + 3\,dt \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 6. \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 7.57**

Calcule $\int\int_S F\cdot N\,dS$ si $F(x,y,z)=xy^2\,\overrightarrow{i}+x^2y\,\overrightarrow{j}+y\,\overrightarrow{k}$, N es el vector normal unitario exterior a S y S es la superficie dada por $S=S_1\cup S_2\cup S_3$ donde S_1,S_2,S_3 son las tres superficies frontera del sólido Q limitado por $x^2+y^2=1$, $z=1$ y $z=-1$ como se ve en la figura 7.54.

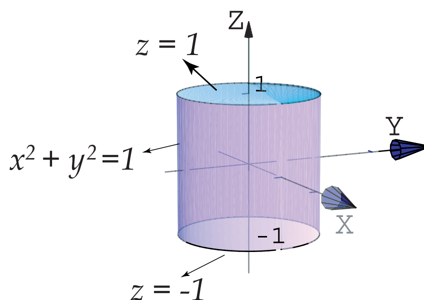


Figura 7.54 Curva C

Solución.

Podemos aplicar el teorema de la divergencia,

• $\text{Div}F=y^2+z^2$

• La proyección es el círculo $x^2+y^2=1$

$$\begin{aligned}\int\int_S F\cdot N\,dS &= \int\int\int_Q \text{Div}\,F\,dV\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^1 r^2\,r\,dr\,d\theta\\ &= \pi\end{aligned}$$

EJERCICIOS

7.1 Sea Q el sólido de la figura 7.55.

Calcular $\int_C F\cdot dr$ si $F(x,y,z)=(x,x,z)$ y C es la frontera de la superficie S en la figura 7.55.

Calcular $\displaystyle\int\int_{\partial Q} F\cdot N\,dS$ donde $F(x,y,z)=(x,y,z)$, ∂Q es la frontera del sólido Q y N es el vector vector normal unitario exterior.

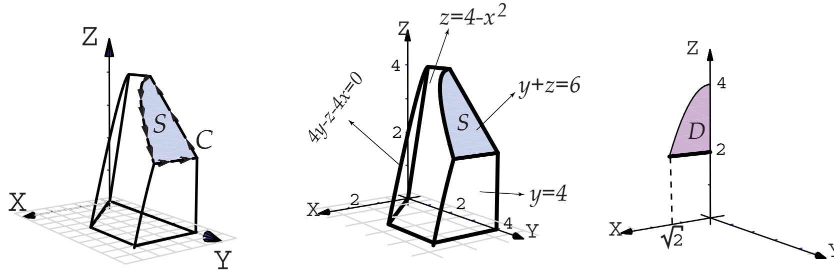


Figura 7.55 Sólido Q, superficie S y curva C.

7.2 Calcular $\displaystyle\iint_E F\cdot N\,dS$ donde $F(x,y,z)=x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}+z\,\overrightarrow{k}$ y E es la superficie de ecuación $z=1+x^2+y^2$, con $1\le z\le 3$, tal y como se muestra en la figura 7.56.

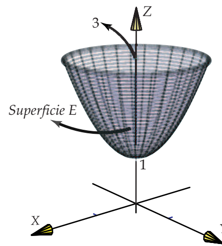


Figura 7.56 Superficie E.

7.3 Sea E la frontera del sólido Q limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=2$ y el cono $z^2=y^2+x^2$, tal y como se muestra en la figura 7.57.

Si $F(x,y,z)=xz\,\overrightarrow{i}+x\arctan(xz)\,\overrightarrow{j}+\dfrac{z^2}{2}\,\overrightarrow{k}$, calcular $\displaystyle\iint_E F\cdot N\,dS$.

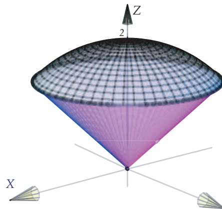


Figura 7.57 Sólido Q.

7.4 Sea $F(x,y,z) = 2yz\,\overrightarrow{i} - 4x\,\overrightarrow{j} - 3z^2\,\overrightarrow{k}$.
Sea C la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = 4 - x^2$ con el plano $y + z = 6$, tal y como se muestra en la figura 7.58. Calcular $\int_C F \cdot dr$.

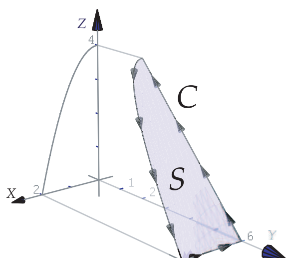


Figura 7.58 Curva C.

7.5 Sea $F(x,y,z) = \operatorname{sen}(yz)\,\overrightarrow{i} + xz\cos(yz)\,\overrightarrow{j} + (xy\cos(yz) + e^z)\,\overrightarrow{k}$.

a) Determine que F es conservativo

b) Encuentre una función potencial para F.

c) Calcule la integral $\int_C F \cdot dr$ donde C es la curva que une los puntos $(0,0,0)$ y $(2,1/2,\pi)$.

d) Calcule $\int_C F \cdot dr$ donde C es la curva que resulta de intersecar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $y + z = 2$.

7.6 Use el teorema de la divergencia para calcular $\int\int_S F \cdot N\,dS$ donde S es la frontera del sólido Q, en el primer octante, limitado por la superficie $z = x^2 + y^2 + 5$ y el plano $z = 10$ (figura 7.59) y N es el normal exterior unitario a la superficie y $F(x,y,z) = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

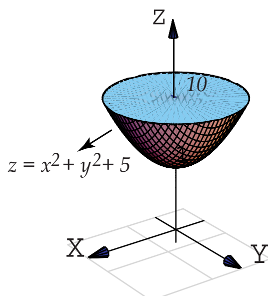


Figura 7.59 Sólido Q

7.7 Evalúe $\int_C x^2z\,dx - yx^2\,dy + 3xz\,dz$ con $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ donde C_1, C_2, C_3 son las curvas que se muestran en la figura 7.60

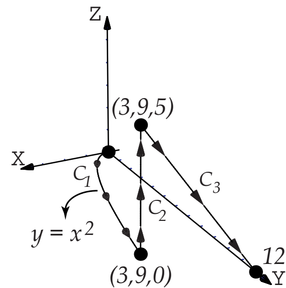


Figura 7.60 Curvas C_1, C_2, C_3

7.8 Evalúe la integral de línea $\int_C x\,ds$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es la curva del ejercicio anterior.

7.9 Calcule $\int\int_S x^2 - 2y + z\,dS$ donde S es la superficie de la figura 7.61

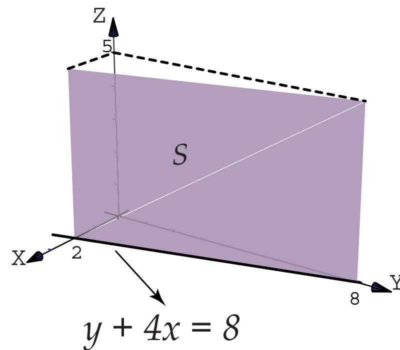


Figura 7.61 Superficie S

7.10 Sea F un campo vectorial dado por $F(x,y) = (x+y)\,\overrightarrow{i} - (x^2+y^2)\,\overrightarrow{j}$. La curva C es la frontera del trapecio limitado por las curvas $y = 0,\ x = 1,\ x = 3$ y $y = x$ como se muestra en la figura 7.62.

1. Calcular la integral $\int_C F \cdot dr$ usando el teorema de Green.
   Respuesta. $-\dfrac{64}{3}$

2. Calcular la integral $\int_C F \cdot dr$ **sin utilizar** el teorema de Green.

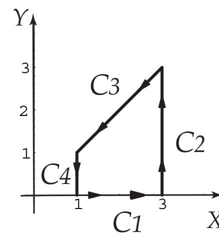
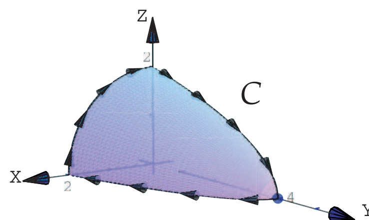


Figura 7.62 Curva C

Respuesta. $\int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr + \int_{C_4} F \cdot dr = 4 - 36 + 28/3 + 4/3 = -\dfrac{64}{3}$

7.11 Use el teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$ donde $F(x,y,z) = x^2\,\overrightarrow{i} + xy\,\overrightarrow{j} + z^2\,\overrightarrow{k}$ y C es la frontera de la porción del paraboloide $y = 4 - x^2 - z^2$ que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la figura



Respuesta. $\int_C F \cdot dr = -\dfrac{128}{15}.$

Note que el vector normal adecuado, es $N = (-2x, -1, -2z)/||(-2x, -1, -2z)||$.

Bibliografía

[1] Louis Brand. *Advanced Calculus. An Introduction to Classical Analysis.* Wiley & Sons, Inc. 1995.

[2] Claudio Pita R. *Cálculo Vectorial.* Prentice-Hall. 1995.

[3] Sherman Stein. *Cálculo con Geometría Analítica.* McGraw-Hill. 1984.

[4] Tom Apostol. *Calculus.* Wiley. 1967

[5] Jorge Poltronieri. *Cálculo Integral: Integración Múltiple.* Editorial Cimpa. 1ra ed. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. 2006.

[6] Jorge Poltronieri. *Cálculo Integral: Integración de Línea y Superficie.* Editorial Cimpa. 1ra ed. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. 2006.

[7] Jerrold Marsden, Anthony Tromba. *Cálculo Vectorial.* Addison-Wesley. 3ra ed. 1991.

[8] Walter Mora F., Geovanni Figueroa M. "Gráficos 3D con Mathematica, GraphicsLive 3D y JavaView". Revista digital Matemática, Educación e Intenet (www.cidse.itcr.ac.cr). Volumen 6, número 1. 2005.

[9] Walter Mora F. “Gráficos 3D interactivos con Mathematica y LiveGraphics3D ”. Revista digital Matemática, Educación e Intenet (www.cidse.itcr.ac.cr). Volumen 6, número 2. 2005.

Indice

C

Cilindros, 49
Completar cuadrados, 2
Curvas de nivel, 57

D

Derivación implícita, 110
Derivada direccional, 121
Derivada parcial, 84
  de orden superior, 91
  interpretación geométrica, 88
Diferenciabilidad, 104
Diferencial total, 101
Diferenciales, 101
Distancia entre dos puntos, 2

E

Ecuación de segundo grado, 35
Elipse, 17
  eje mayor, 17
  eje menor, 17
  excentricidad, 25
  focos, 17
  reflexión, 26
  vértices, 17

G

Gradiente, 121

F

Hipérbola, 27
  asíntotas, 30
  centro, 27
  ecuación canónica, 27
  eje transversal, 27
  excentricidad, 30
  vértices, 27

L

Lugar geométrico, 3

P

Parábola, 7
  directriz, 7
  ecuación canónica, 8
  foco, 7
  reflexión, 15
Parametrización, 65
Plano tangente, 137
Planos, 47
Primer octante, 40

R

Regla de la cadena, 106

T

www.elsolucionario.net

Trazas, 56

V

Vector unitario tangente, 130